

REPORT DOCUMENTATION PAGE				Form Approved OMB No. 0704-0188	
<small>Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing the burden, to Department of Defense, Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports (0704-0188), 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302. Respondents should be aware that notwithstanding any other provision of law, no person shall be subject to any penalty for failing to comply with a collection of information if it does not display a currently valid OMB control number.</small> PLEASE DO NOT RETURN YOUR FORM TO THE ABOVE ADDRESS.					
1. REPORT DATE (DD-MM-YYYY) 6 February 2015		2. REPORT TYPE Conference Proceedings		3. DATES COVERED (From – To) 31 December 2012 – 30 May 2014	
4. TITLE AND SUBTITLE Difference Schemes and Applications				5a. CONTRACT NUMBER FA8655-13-1-3023	
				5b. GRANT NUMBER CSP 13-3023	
				5c. PROGRAM ELEMENT NUMBER 61102F	
				5d. PROJECT NUMBER	
6. AUTHOR(S) Semyon V. Tsynkov, PhD, DSc				5d. TASK NUMBER	
				5e. WORK UNIT NUMBER	
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES) North Carolina State University Department of Mathematics Box 8205 Raleigh, NC 27695 USA				8. PERFORMING ORGANIZATION REPORT NUMBER	
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES) EOARD Unit 4515 APO AE 09421-4515				10. SPONSOR/MONITOR'S ACRONYM(S) AFRL/AFOSR/IOE (EOARD)	
				11. SPONSOR/MONITOR'S REPORT NUMBER(S) AFRL-AFOSR-UK-PC-2015-0002	
12. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT Distribution A: Approved for public release; distribution is unlimited.					
13. SUPPLEMENTARY NOTES					
14. ABSTRACT Since the 1950-ies, the work of Professor Victor S. Ryaben'kii has been of central importance for the formation and development of numerical methods as a mathematical discipline. International conference "Difference Schemes and Applications" in honor of his ninetieth birthday took place in May of 2013 at the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (RAS), in Moscow, Russia. The conference brought together a number of leading experts in computational mathematics and related areas. It provided a forum for discussing the recent progress in numerical solution of partial differential equations (PDEs), and for reviewing the promising new trends in this and other fields. During three working days, about sixty oral and poster presentations were given, discussing the following subjects: -Numerical analysis of PDEs and scientific computation; -Differential and difference equations; -Difference potentials, artificial boundary conditions; -Inverse problems, mathematical theory of active control of sound; -Mathematical modeling in science and engineering; -Computational fluid dynamics and mechanics of turbulence. The conference had two working languages — English and Russian. A book of extended abstracts was published before the conference and made available to the participants. A special issue of Applied Numerical Mathematics is currently underway.					
15. SUBJECT TERMS EOARD, Difference Schemes, partial differential equations					
16. SECURITY CLASSIFICATION OF:			17. LIMITATION OF ABSTRACT SAR	18, NUMBER OF PAGES 124	19a. NAME OF RESPONSIBLE PERSON Gregg L. Abate
a. REPORT UNCLAS	b. ABSTRACT UNCLAS	c. THIS PAGE UNCLAS			19b. TELEPHONE NUMBER (Include area code) +44 (0)1895 616021

Abstract

Since the 1950-ies, the work of Professor Victor S. Ryaben'kii has been of central importance for the formation and development of numerical methods as a mathematical discipline. International conference “Difference Schemes and Applications” in honor of his ninetieth birthday took place in May of 2013 at the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (RAS), in Moscow, Russia. The conference brought together a number of leading experts in computational mathematics and related areas. It provided a forum for discussing the recent progress in numerical solution of partial differential equations (PDEs), and for reviewing the promising new trends in this and other fields. During three working days, about sixty oral and poster presentations were given, discussing the following subjects:

- Numerical analysis of PDEs and scientific computation;
- Differential and difference equations;
- Difference potentials, artificial boundary conditions;
- Inverse problems, mathematical theory of active control of sound;
- Mathematical modeling in science and engineering;
- Computational fluid dynamics and mechanics of turbulence.

The conference had two working languages — English and Russian. A book of extended abstracts was published before the conference and made available to the participants. A special issue of Applied Numerical Mathematics is currently underway.

Summary of the conference

One of the central topics of the meeting was numerical solution of partial differential equations (PDEs). Several subjects were discussed, including discretizations, boundary conditions, and solvers. A special emphasis was made on various aspects related to high order accuracy. In particular, J. Hesthaven (Brown U./EPFL) spoke about the combined Fourier-WENO schemes for problems with discontinuous solutions (shock waves) and E. Toro (U. Trento, Italy) gave a review of the ADER schemes. N. Mikhailov (Russian Federal Nuclear Center) discussed the convergence of high order WENO schemes behind the shocks, which is known to be a delicate subject. B. Rogov (Keldysh Institute) introduced monotone high order accurate compact schemes for multi-dimensional hyperbolic equations (monotonicity and high order accuracy are known to be difficult to reconcile), and E. Aristova (Keldysh Institute) presented bi-compact schemes for the advection equation. L. Dovgilevich (Schlumberger, Moscow) introduced a high order accurate summation by parts method for mixed derivatives not subject to instabilities due to odd-even decoupling. A. Kurganov (Tulane U.) presented central non-oscillatory Godunov-type schemes for general hyperbolic systems of conservation laws. S. Tsynkov (NCSU) spoke about a high order accurate version of the method of difference potentials (originally introduced by V. Ryaben'kii) for solving the time harmonic wave propagation problems.

The very first presentation at the meeting was given by V. Ryaben'kii himself (Keldysh Institute); he spoke about solving linear inverse problems (e.g., active control of sound) in composite domains using the method of difference potentials. Yet another presentation related to the method of difference potentials was given by Y. Epshteyn (U. Utah) who employed it to build a family of domain decomposition algorithms for parabolic problems.

T. Hagstrom (Southern Methodist U.) discussed high order accurate finite difference methods for unsteady waves and also spoke about the design of appropriate high order accurate boundary conditions. A few other talks were devoted specifically to the boundary conditions, in particular, the treatment of artificial outer boundaries, which has been among the most difficult issues in numerical PDEs for many years. I. Sofronov (Schlumberger, Moscow) spoke about the localization of exact transparent boundary conditions for second order hyperbolic systems, and N. Zaitsev (Keldysh Institute) presented a similar approach for the equations of elastodynamics in a 3D isotropic medium. L. Dorodnicyn (Moscow State U.) discussed the construction and studied stability of non-reflecting artificial boundary conditions (ABCs) for high order schemes on wide stencils, when the discrete approximation requires more boundary conditions than the underlying differential problem. N. Zavyalova (Moscow Institute for Physics and Technology) presented a family of nonlocal highly accurate ABCs for the Helmholtz equation. A. Zlotnik (Higher School of Economics, Moscow) presented ABCs for the Schrödinger equation.

There were several talks on recent advances in multigrid methods that remain a key tool for solving the systems of algebraic equations that result from the discretizations of PDEs. V. Zhukov (Keldysh Institute) presented a version of the multigrid method optimized for anisotropic problems, and A. Zadorin (Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS) discussed the application of multigrid to problems with boundary layers. S. Martynenko (Central Institute of Aviation Motor Development, Moscow) presented a universal multigrid strategy for a broad spectrum of problems ranging from the Poisson to Navier-Stokes equations.

Another key topic of the conference was mathematical modeling in various areas of science and engineering. This topic, in fact, is closely related to the previous one (computing the solutions of PDEs), because the analysis of the corresponding mathematical models was conducted by both analytical and numerical methods.

G. Barenblatt (RAS/UC Berkeley) presented a very interesting new development in the theory of turbulent shear flows, basically saying that the well-known von Kármán-Prandtl logarithmic velocity profile (independent of the global Reynolds number) describes the flow with insufficient accuracy and needs to be replaced by a power law that depends on the local Reynolds number. S. Utyuzhnikov (U. Manchester) used the method of difference potentials for computing the near-wall turbulence on composite domains with no overlaps. D. Kamenetskiy (Boeing, Seattle) presented numerical evidence of multiple solutions (i.e., that of non-uniqueness) for the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations describing high-lift aerodynamic configurations.

M. Salas (NASA Langley) studied the dispersion of traveling waves governed by the Korteweg-de Vries equation. S. Abarbanel (Tel Aviv U.) introduced a framework for the analysis of acoustic waves propagating across a non-uniform medium. A. Chertock (NCSU) presented the results of a numerical study of compressible fluid flows in domains with moving boundaries. T. Elizarova (Keldysh Institute) introduced a special regularized form (time-averaged over a short interval) of the shallow water equations that is well suited for complex geometries and moving boundaries. Another (similar) regularization of the shallow water equations was shown by Yu. Sheretov (Tver State University, Russia). T. Kudryashova (Keldysh Institute) presented a mathematical model for the supersonic flow of a gas mixture that applies to the case where the fundamental hypotheses of continuity of the medium may partially break down.

A variety of additional subjects has been discussed as well, including linear solvers and parallel computations, finite difference stability, grid generation, finite element methods, numerical solution of stochastic differential equations, numerical solution of differential equations with singularities, mathematical models and numerical simulations for fluids, gas-solid interactions, plasmas, radiation diffusion and transfer, porous media and filtration, electromagnetic propagation in complex media, kinetic equations with collisions, and others.

A book of extended abstracts (up to two pages each) was published right before the conference (ISBN: 978-5-98354-010-1). It contains abstracts of almost all of the oral and poster presentations, about sixty altogether. A PDF version of this book of abstracts is uploaded with the current report.

In addition, a special issue of Applied Numerical Mathematics (an Elsevier Journal) is planned that will contain full length papers based on some of the presentations from the conference. The PI of the project, Prof. S. Tsynkov, serves as Managing Guest Editor for the special issue. He is assisted by Dr. Y. Epshteyn and Dr. I. Sofronov in the capacity of Guest Editors. At the time the current report is written (June of 2014), the submission of papers to the special issue has already been closed. Out of the 25 submitted manuscripts, about three quarters have already been properly refereed and accepted for publication. We expect that the special issue will be finalized before the Fall of 2014, and may actually appear in print either in the end of 2014 or in the beginning of 2015.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН



Международная конференция
«Разностные схемы и их приложения»,
посвященная 90-летию профессора В.С. Рябенского

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

27-31 май 2013
Москва

Виктор Соломонович Рябенский

90



B. F. Johnson

**Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**Международная конференция
«Разностные схемы и их приложения»,
посвященная
90–летию профессора
ВИКТОРА СОЛОМОНОВИЧА РЯБЕНЬКОГО**

Москва, 2013

УДК 51, 53
ББК 22.19

Сборник научных трудов Международной конференции «Разностные схемы и их приложения», посвященной 90-летию профессора В.С.Рябенского
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
Москва, 27-31 мая 2013 г.

В сборнике представлены доклады по вычислительной и прикладной математике. В них отражено современное состояние теории и приложений численных методов для решения уравнений математической физики, обсуждается проблематика теории разностных потенциалов и искусственных граничных условий, рассматриваются вопросы описания и расчетов турбулентных течений.

Proceedings of the International Conference «Difference schemes and applications» in Honor of the 90-th Birthday of Prof. V.S. Ryaben'kii
Keldysh Institute of Applied Mathematics, May 27-31, 2013

The collection contains papers on computational and applied mathematics. They reflect the present state of the theory and application of numerical methods for solving the equations of mathematical physics, the problems of the theory of difference potentials and artificial boundary conditions are discussed, progress in calculation of turbulent flows are considered.

Программный комитет искренне благодарит за поддержку Российскую Академию Наук, Международную Ассоциацию по Математике и Компьютерам в Моделировании, Государственный Университет Штата Северная Каролина, США, Бюро Научных Исследований Армии США и Европейское Бюро Аэрокосмических Исследований и Разработок (EOARD), Лабораторию FlowModellium "Математическое моделирование нелинейных процессов в газовых средах" МФТИ.



Российская Академия Наук



Редакционная коллегия: К.В. Брушлинский, М.С. Гавреева, В.Т. Жуков,
А.В. Северин, Н.А. Чмыхова

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша Российской академии наук

Москва, 2013

ISBN: 978-5-98354-010-1

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Distribution A: Approved for public release; distribution is unlimited.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
В.С. Рябенский КЛЮЧЕВАЯ ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В СОСТАВНЫХ ОБЛАСТЯХ ...	11
S. Abarbanel, A. Ditkowski WAVE PROPAGATION IN ADVECTED ACOUSTICS WITHIN A NON- UNIFORM MEDIUM UNDER THE EFFECT OF GRAVITY	14
G.I. Barenblatt, A.G. Chorin, V.M. Prostokishin THE SIMPLEST TURBULENT FLOW: SHEAR FLOW AT VERY LARGE REYNOLDS NUMBERS. A SURVEY OF THE TOTAL OF STUDIES	15
M.A. Botchev EFFICIENT TIME-STEPPING-FREE TIME INTEGRATION OF THE MAXWELL EQUATIONS	16
A. Chertock A SIMPLE EULERIAN FINITE-VOLUME METHOD FOR COMPRESSIBLE FLUIDS IN DOMAINS WITH MOVING BOUNDARIES	17
T. Hagstrom BOUNDARY CONDITIONS FOR HIGH-RESOLUTION SIMULATIONS OF WAVES	18
D.S. Kamenetskiy, J.E. Bussioletti, C.L. Hilmes F.T. Johnson, V. Venkatakrishnan, L.B. Wigton NUMERICAL EVIDENCE OF MULTIPLE SOLUTIONS FOR THE REYNOLDS--AVERAGED NAVIER--STOKES EQUATIONS FOR HIGH--LIFT CONFIGURATIONS	19
A.V. Karpeev, I.V. Glazyrin, O.G Kotova IONIZATION-ASSISTED RELATIVISTIC ELECTRON GENERATION WITH MONOENERGETIC FEATURES FROM LASER THIN FOIL INTERACTION	22
A. Kurganov CENTRAL SCHEMES: A POWERFUL BLACK-BOX SOLVER FOR NONLINEAR HYPERBOLIC PDES	23

I. Menshov BOUNDARY IN CELL (BIC) METHOD FOR GAS-SOLID DYNAMICS SIMULATIONS	24
Yu.V. Mukhartova, N.A. Bogoliubov, A.G. Sveshnikov FINITE ELEMENTS METHOD FOR MATHEMATICAL MODELING OF 3-D BI-ISOTROPIC WAVEGUIDE	28
M. D Salas ON HIGH DISPERSION TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF THE KORTEWEG-DE VRIES BURGERS EQUATION	30
E. Toro ADER SCHEMES FOR EVOLUTIONARY PDES: A REVIEW	32
D.S. Britt, M. Medvinsky, E. Turkel, С.В. Цынков HIGH ORDER NUMERICAL SIMULATION OF THE TRANSMISSION AND SCATTERING OF WAVES USING THE METHOD OF DIFFERENCE POTENTIALS	33
А.А. Абрамов, Л.Ф. Юхно О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ	35
Е.Н. Акимова ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С БЛОЧНО- ПЯТИДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ	37
С.Д. Алгазин ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ	39
Е.Н. Аристова, С.В. Мартыненко, Б.В. Рогов БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА	41
И.Б. Бадриев СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОПЕРАТОРАМИ МОНОТОННОГО ТИПА	43
А.К. Баззаев, М.Х. Шхануков-Лафишев ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА	45
А.Л. Бондарева, Г.И. Змиевская МОДЕЛЬ ПОРИСТОСТИ В ТОНКИХ СЛОЯХ	46

А.И. Белокрис-Федотов, В.А. Гаранжа , Л.Н. Кудрявцева, С.В. Утюжников ПОСТРОЕНИЕ ТОЛСТЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СЕТОЧНЫХ СЛОЕВ ОКОЛО ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ	48
А. В. Гулин ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ	50
Л.Е. Довгилевич , И.Л. Софронов АППРОКСИМАЦИЯ ВТОРЫХ И СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ SVR ПОДХОДОМ НА ОСНОВЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПЕРВЫХ РАЗНОСТЕЙ	52
Г.В. Долголева ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ПЛАЗМЕ ..	54
Л.В. Дородницын ЛОКАЛЬНЫЕ НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ	55
Т.Г. Елизарова , О.В. Булатов РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ В НЕГЛУБОКИХ ВОДОЕМАХ.....	57
В.Т. Жуков , Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ РАЗНОСТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	58
Н.А. Завьялова , С.В. Утюжников МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ УПРОЩЕННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ИСКУССТВЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ	61
А.И. Задорин ДВУХСЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ	62
Н.А. Зайцев УСЕЧЕННЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ НА ОТКРЫТЫХ ГРАНИЦАХ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ.....	64
А.А. Злотник , И.А. Злотник ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ С ДИСКРЕТНЫМИ ПРОЗРАЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА	66

Т.А. Аверина, А.Л. Бондарева, Г.И. Змиевская РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО-СТРАТОНОВИЧА В МОДЕЛИ АМОРФИЗАЦИИ ПОКРЫТИЯ	68
И.Ф. Потапенко, С.А. Карпов РАЗНОСТНЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ	69
А.В. Ким , В.М. Кормышев, М.А. Сафронов, А.В. Семенов ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИММУННЫХ ПРОЦЕССОВ	71
И.Ю. Колесников ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ ДЛЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	73
Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЛОКАЛЬНЫХ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ	75
С.В. Поляков, Т.А. Кудряшова МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ	76
С.И. Мартыненко УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ: КОНСТРУКЦИЯ, АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ, ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ	77
Н.А. Михайлов О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ WENO ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ	79
А.А. Недоступ, А.О. Ражев МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЕ	81
А.П. Николаев , Л.А. Николаев ДЕТАЛЬНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ НА БОЛЬШИХ ТЕРРИТОРИЯХ	83
С.А. Медин, А.Н. Паршиков ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ РАСПАДА РАЗРЫВОВ В МЕТОДЕ SPH	85

И.А. Ильин, Д.С. Нощенко, А.С. Пережогин О ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ	87
Ю.М. Раппопорт ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЯХ	89
Б.В. Рогов, С.В. Утюжников, А.В. Чикиткин МОНОТОННЫЕ ВЫСОКОТОЧНЫЕ КОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ БЕГУЩЕГО СЧЕТА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	91
С.И. Соловьёв СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ.....	93
П.Н. Сорокин, Н.Н. Ченцова R-МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ГАУССА	94
И.Л. Софронов УСЕЧЕННЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА	96
Б.В. Рогов, А.В. Чикиткин, Г.А. Тирский ЭФФЕКТ ОБЪЁМНОЙ ВЯЗКОСТИ В ИЕРАРХИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ УПРОЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ- СТОКСА	97
В.А. Титарев, С.В. Утюжников СРАВНЕНИЕ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА СЖИМАЕМОГО ГАЗА ..	99
А.В. Шильков, В.А. Тыглиян ТОЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ	101
С.В. Утюжников МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ БЕЗ ПЕРЕКРЫТИЯ ПОДОБЛАСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИСТЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ	102
О.Г. Чижко КОНТРОЛЬ ШИРИНЫ ШАГА ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	103

С.В. Милютин, А.А. Фролов, Е.В. Чижонков О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ	105
А.А. Сухомозгий, Ю.В. Шеретов ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА В ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ.....	107
М.И. Эпов, Н.В. Штабель , Э.П. Шурина МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТЯХ С АНИЗОТРОПНЫМИ ОБЪЕКТАМИ	109
М.И. Эпов, Э.П. Шурина , Е.И. Михайлова МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТЯХ С МАЛЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ	111

ВИКТОР СОЛОМОНОВИЧ РЯБЕНЬКИЙ

20 марта исполнилось 90 лет выдающемуся ученому, главному научному сотруднику Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации Виктору Соломоновичу Рябенькому. Его научные успехи приобрели мировую известность, но говоря о них, мы также обязаны всегда помнить о непростой судьбе советских мужчин 1923 года рождения, испытавших на себе великие и одновременно трагические события минувшего века, в условиях которых рождалась научная биография нашего юбиляра. Ему не довелось реализовать свои способности к математике сразу после окончания средней школы. Великая Отечественная война изменила планы большинства его сверстников. Он ушел на нее добровольцем и закончил войну с боевыми наградами водителем танка, принесшего Победу в Прагу 9 мая 1945 года. Только после этого можно было вернуться в Москву и продолжить прерванное образование. В 1949 году Виктор Соломонович закончил мехмат Московского Университета и был оставлен в аспирантуре, где под руководством академика И.Г.Петровского занимался разработкой теории разностных аналогов дифференциальных уравнений в частных производных. Его первые шаги здесь, несмотря на то, что они не соприкасались с практическими расчетами, оказались весьма успешными и составили содержание совместной с А.Ф.Филипповым монографии «Об устойчивости разностных уравнений», опубликованной в 1956 году вскоре после защиты кандидатской диссертации. Это была первая в мире монография в данной области.

По окончании аспирантуры В.С. Рябенкий работал доцентом Московского заочного педагогического института, а в 1957 году был приглашен в Отделение прикладной математики – ныне ИПМ им.М.В.Келдыша РАН. Здесь в интенсивных закрытых работах по расчетам задач газовой динамики с теплопроводностью разностными методами накопился успешный опыт практической работы. В.С. Рябенькому вместе с С.К. Годуновым было поручено теоретически обобщить и опубликовать этот опыт, что и было сделано в виде совместной монографии «Введение в теорию разностных схем» (1962), которая затем переработана в учебное пособие, вышедшее двумя изданиями в 1973 и 1978 гг.

В последующие годы В.С. Рябенкий – теперь уже признанный специалист в области разностных уравнений, создал теорию разностных потенциалов, опубликованную в многочисленных статьях и обобщенную в трех

изданиях одноименной монографии (1987, 2002, 2010 гг.), удостоенной премии им. И.Г. Петровского в 2007 году. В ее основу положен аналог интегральных формул типа Коши для аналитических функций в применении к дискретным функциям на расчетных сетках. Эта теория находит эффективные приложения в численном решении задач математической физики в бесконечных областях: она позволяет ограничиться областью конечных размеров с искусственными граничными условиями, перенесенными из бесконечности. В последнее время выполнена серия работ по решению актуальных задач акустики об усилении или, наоборот, глушении звуков в системе из двух соседних помещений: управление этими процессами осуществляется с помощью разностных потенциалов, сосредоточенных вдоль границы между ними.

В течение десятилетий В.С. Рябенкий вел постоянную педагогическую работу профессора кафедры вычислительной математики МФТИ. Здесь им созданы и прочитаны курсы лекций, на их основе написано учебное пособие «Введение в вычислительную математику», вышедшее тремя изданиями в 1994, 2000 и 2008 годах. Его многочисленные ученики – кандидаты и доктора наук успешно продолжают развивать тематику своего учителя в нашей стране и за рубежом.

Свой солидный юбилей Виктор Соломонович празднует «без отрыва от производства», увлеченно работая в избранной им области науки. Пожелаем ему доброго здоровья, успехов и радостей.

КЛЮЧЕВАЯ ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В СОСТАВНЫХ ОБЛАСТЯХ

В.С. Рябенский

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
ryab@keldysh.ru*

Определено понятие ключевой информации о разностной схеме и цели управления ее решением. Получена формула вычисления по этой информации управляющего воздействия, защищающего решение в заданной подобласти от влияния правых частей, локализованных в дополнительной подобласти.

The concept of key information on difference scheme and goals to how control its solution are defined. A formula of calculation of control action by this information is obtained. The control influence is protected the solution in a given subregion from the influence of right-hand sides which are localized in the additional subdomain.

Рассмотрим разностную схему

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m, \quad m \in M, \quad (1)$$

M – заданное конечное множество точек m , $m \in M$; N_m – заданное множество точек n , $n \in N_m$; a_{mn} , $m \in M$, $n \in N_m$ – заданные коэффициенты; f_m , $m \in M$ – заданные правые части. Решение $u_N = \{u_n\}$ задачи (1) определено на множестве $N = \cup N_m$, $m \in M$. Функции $f_M = \{f_m\}$, $m \in M$, и $u_N = \{u_n\}$, $n \in N$, могут быть вектор-функциями, коэффициенты a_{mn} могут быть прямоугольными матрицами.

Пространство всех правых частей f_M обозначим F_M , а всех функций u_N , для которых имеет смысл левая часть (1), обозначим U_N . Предположим выполненным условие согласования между M ; N_m , $m \in M$ a_{mn} , $m \in N_m$; $f_M \in F_M$ и $u_N \in U_N$. Это условие состоит в том, что схема (1) имеет одно и только одно решение $u_N \in U_N$ при любой правой части $f_M \in F_M$.

Пусть M^+ – какое-нибудь подмножество $M^+ \subset M$ множества M . Определим M^- , N^+ , N^- и сеточную границу γ между N^+ и N^- , положив $M^- = M \setminus M^+$; $N^+ = \cup N_m$, $m \in M^+$; $N^- = \cup N_m$, $m \in M^-$; $\gamma = N^+ \cap N^-$. Обозначим U_γ пространство всех функций u_γ , полученных сужением на γ , $\gamma \subset N$ всевозможных функций $u_N \in U_N$.

Наряду с (1) рассмотрим следующие две схемы

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^- = \theta_M(M^+) f_m, \quad m \in M, \quad (2)$$

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^+ = \theta_M(M^-) f_m, \quad m \in M, \quad (3)$$

где $\theta_Y(X)$, $X \subset Y$ – характеристическая функция множества X . Очевидно равенство

$$u_n = u_n^- + u_n^+, \quad n \in N. \quad (4)$$

Пусть разностная схема (1) есть разностная аппроксимация некоторой линейной задачи о звуковом поле, причем f_m – моделирует плотность источников, а u_N моделирует акустическое поле.

Для краткости речи сохраним термины "акустическое поле", "плотность источников" и для абстрактных схем (1)-(3). Слагаемые u_N^- и u_N^+ в сумме (4) приобретают смысл вкладов влияния источников f_m , $m \in M^+$, и источников f_m , $m \in M^-$, в акустическое поле u_N , $u_N = u_N^- + u_N^+$.

Пусть z_N , $z_N \in U_N$, произвольная фиксированная функция из U_N . Пусть g_M , $g_M \in F_M$, и z_N связаны так, что z_N является решением задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n = f_m + g_m, \quad m \in M \quad (5)$$

Определение 1. Будем говорить, что g_m есть управление решением u_N задачи (1), переводящее u_N в заданную функцию z_N . Функцию z_N будем называть целевой функцией для управления g_M .

Теорема 1. При любой целевой функции z_N , $z_N \in U_N$, существует одно и только одно управление g_M , которое переводит u_N в z_N . Это управление можно записать формулой

$$g_m = \sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n - f_m, \quad m \in M \quad (6)$$

Введем семейство функций $z_N = z_N(A^-, A^+)$, зависящее от двух вещественных параметров A^- и A^+ , и заданных формулой

$$z_N(A^-, A^+) = \begin{cases} A^- u_n^- + u_n^+, & \text{если } n \in N^- \\ u_n^- + A^+ u_n^+, & \text{если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \quad (7)$$

Очевидно

$$z_N(1, 1) = u_N^- + u_N^+ = u_N. \quad (8)$$

При переходе от u_N к $z_N(A^-, A^+)$ вклады источников f_m , локализованных в точках $m \in M^+$ и $m \in M^-$, в акустическое поле, в силу (7) умножается в точках $n \in N^-$ и $n \in N^+ \setminus \gamma$ на A^- и A^+ соответственно. В частности, если $A^- = 0$, то происходит полная защита акустического поля в точках $n \in N^-$ от влияния источников f_m , $m \in M^+$. Если вклад влияния источников f_m , $m \in M^+$ в акустическое поле z_n в точках $n \in N^-$ трактовать как нежелательный шум, то переход от u_N к $z_N(0, A^+)$ означает полную защиту акустического поля в точках $n \in N^-$ от шума источников f_m , $m \in M^+$.

Определение 2. Ключевой информацией для управления $g_m = g_m(A^-, A^+)$ переходом от u_N к $z_N(A^-, A^+)$ назовем функцию $w_\gamma = w_\gamma(A^-, A^+)$, связанную с u_γ^- и u_γ^+ равенством

$$w_\gamma(A^-, A^+) = (A^- - 1)u_\gamma^- + (1 - A^+)u_\gamma^+ \quad (9)$$

Замечание. Подчеркнем, что для знания $w_\gamma(A^-, A^+)$ достаточно помимо самой функции $w_n(A^-, A^+)$ в точках $n \in \gamma$ еще знать, что существует связь (9) функции $w_\gamma(A^-, A^+)$ с функциями u_γ^- и u_γ^+ , но сами функции u_γ^- и u_γ^+ могут оставаться неизвестными.

Так, например, если $A^- = 0$, $A^+ = 2$, то есть если

$$z_N(A^-, A^+) = \begin{cases} u_n^+, & \text{если } n \in N \\ u_n^- + 2u_n^+, & \text{если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}$$

то ключевая информация

$$w_\gamma = w_\gamma(0, 2) = (\theta - 1)u_\gamma^- + (1 - 2)u_\gamma^+ = -u_\gamma$$

совпадает с $(-u_\gamma)$ независимо от вида функций u_γ^- и u_γ^+ .

Теорема 2. Управление $g_M = g_M(A^-, A^+)$, переводящее u_N в целевую функцию $z_N(A^-, A^+)$, задается формулой

$$g_m(A^-, A^+) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \in M^- \\ \sum_{n \in N_m} a_{mn} [\theta_N(\gamma) w_n], & \text{если } m \in M^+, \end{cases} \quad (10)$$

где w_n , $n \in \gamma$, есть значения ключевой информации $w_\gamma(A^-, A^+)$ в точке $n \in \gamma$ и

$$\theta_N(\gamma) w_n = \begin{cases} w_n(A^-, A^+), & \text{если } n \in \gamma \\ 0, & \text{если } n \notin \gamma. \end{cases}$$

Сравним формулы (6) и (10) для вычисления $g_M(A^-, A^+)$. Вычисление $g_M(A^-, A^+)$ по тривиальной формуле (6) требует знания полной информации о разностных схемах (1), (2), (3): нужно знать M ; N_m ; a_{mn} , $m \in M$, $n \in N_m$; f_m , $m \in M$, а также значения $z_n(A^-, A^+)$ целевой функции $z_N(A^-, A^+)$.

Вычисление того же управления $g_M(A^-, A^+)$ по формуле (10) требует знания только ключевой информации $w_\gamma(A^-, A^+)$, а также a_{mn} , для которых $m \in M^+$ и $n \in N_m \cap \gamma$. При этом все три функции $z_N(A^-, A^+)$, u_N^- , u_N^+ и даже область N их определения остаются неизвестными.

Таким образом, теорема 2 осуществляет редукцию проблемы построения управления $g_M(A^-, A^+)$ к проблеме получения ключевой информации $w_\gamma = w_\gamma(A^-, A^+)$

Заметим, что теорема 2 опирается на свойства разностных потенциалов [1]. Теорема 2 является широким обобщением результата [2].

Список литературы

1. В.С.Рябенский. Метод разностных потенциалов и его приложения, М., Физматлит, 2010.
2. В.С.Рябенский. Функциональный анализ и его приложения, М., Наука, 29(1), 70-71, 1995.

WAVE PROPAGATION IN ADVECTED ACOUSTICS WITHIN A NON-UNIFORM MEDIUM UNDER THE EFFECT OF GRAVITY

S. Abarbanel¹, A. Ditkowski²

¹ *Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel,
saula@post.tau.ac.il*

² *Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel,
adid@post.tau.ac.il*

We investigate linear wave propagation in non-uniform medium under the influence of gravity. Unlike the case of constant properties medium here the linearized Euler equations do *not* admit a plane –wave solution. Instead, we find a “pseudo-plane-wave”. Also, there is no dispersion relation in the usual sense. We derive explicit analytic solutions (both for acoustic and vorticity waves) which, in turn, provide some insights into wave propagation in the non-uniform case.

Understanding the phenomenon of wave propagation is of great interest in several fields of scientific and technological importance; e.g. electromagnetics, elasticity, geophysics, fluid flow, acoustics and advected Acoustics. Rarely can one obtain analytic solutions to such problems and then we resort to computations.

Good computational approaches try to be guided as much as possible by analytic knowledge of the nature of The phenomenon. Thus, foe example, numerical solutions of the Navier-Stokes equations rely on insights gained from boundary layer theory.

We focus our attention on the field of advected acoustics in *subsonic* flows. Much is known in the case of Uniform main flow in a constant density (pressure) medium. Hu has done a case of non-uniform main-flow (in a uniform medium) by examining the relations between the group and phase velocities. To our knowledge, the case of non –uniform density, in particular that caused by gravity , has not been worked out in detail.

We start by deriving the dimensionless linearized Euler equations appropriate foe our problem. We then inquire whether the derived equations support a “classical” plane–wave solution. The answer is negative.

Instead of ending up with a homogeneous linear algebraic equation (whose solvability condition yields a dispersion relation) we get a system of linear ordinary differential equations with variable coefficients. We solve this set of o.d.e.'s to obtain the non-constant entries in the coefficient-vector of the "pseudo-plane-wave" solution.

This form of the analytic solution provides some insights into the nature of the phenomenon. Thus, for example, the ratio of the amplitudes of the components of the coefficient-vector to each other do not remain fixed but vary as the square root of the local density.

Numerical computations verify the effects we studied.

THE SIMPLEST TURBULENT FLOW: SHEAR FLOW AT VERY LARGE REYNOLDS NUMBERS. A SURVEY OF THE TOTAL OF STUDIES

G.I. Barenblatt, A.J. Chorin, V.M. Prostokishin

*Institute of Oceanology RAS - Moscow, Russia,
Department of Mathematics, University of California, Berkeley*

Turbulence is one of the basic challenges of modern engineering science and applied mathematics. The most advanced branches of turbulence studies are the investigations of the local structure of turbulent flows at very large Reynolds numbers started by A.N.Kolmogorov and A.M.Obukhov, and those of the structure of turbulent shear flows at very large Reynolds numbers started by Th. von Karman and L.Prandtl. The studies of shear flows in pipes and boundary layers of the wall bounded flows are of central interest in the last branch of turbulence studies.

Practically in all courses, monographs and text-books the structure of the field of averaged velocities in the intermediate region between the viscous sublayer and the vicinity of the pipe axis is described by the universal (Reynolds number independent) von Karman-Prandtl logarithmic law. The drag law is described by an implicit Prandtl formula which was derived on the basis of the logarithmic law.

All these results are based on a hypothesis, explicitly formulated by von Karman, that the flow in the intermediate region does not depend on the fluid viscosity (which means the complete similarity in the dimensionless parameters containing the fluid viscosity).

In the present lecture, summarizing the long time cycle of investigations performed by authors it is shown that the von Karman hypothesis does not correspond to reality. An alternative hypothesis is proposed according to which there is no similarity in the global Reynolds number, and there is an "incomplete similarity" in the local Reynolds number - a similitude parameter equal to the ratio of the distance to the wall to the "viscous length scale".

The analysis performed led to a new power law for the velocity distribution and following from it an explicit formula for the drag coefficient.

The results were compared with all published experimental data and an instructive confirmation was found. An analogous investigation with the same conclusions was performed for boundary layer flows and wall-jets.

The authors came to the conclusion that the von Karman-Prandtl law is not correct. It should be excluded from the teaching process and replaced by proposed and experimentally approved power law.

EFFICIENT TIME-STEPPING-FREE TIME INTEGRATION OF THE MAXWELL EQUATIONS

M.A. Botchev¹

¹*Department of Applied Mathematics, University of Twente,
Enschede, the Netherlands,
m.a.botchev@utwente.nl*

Solution of the time dependent Maxwell equations is an important problem arising in many applications ranging from nanophotonics to geoscience and astronomy. The problem is far from trivial, and solutions typically exhibit complicated wave properties as well as damping behavior. Usually, special staggered time stepping schemes are used [1]. Although their time step may be severely restricted by the CFL condition, performance of these schemes is hard to beat by modern implicit or exponential time integration schemes [2]. We show that in some cases so-called time-stepping-free schemes provide a very efficient alternative to the standard schemes. These schemes employ the matrix exponential function and can be implemented by special block Krylov subspace techniques [3,4].

Numerical examples demonstrating the efficiency of the proposed approach are presented, coming from the fields of nanophotonics and geoscience.

References:

1. M.A. Botchev, J.G.Verwer, Numerical integration of damped Maxwell equations // SIAM J. Sci. Comput. 2009, vol. 31(2), pp. 1322-1346 .
2. J.G.Verwer,, M.A. Botchev, Unconditionally stable integration of Maxwell's equations // Linear Algebra and its Applications, 2009, vol. 431, Issues 3-4, pp. 300-317.
3. M.A. Botchev, V. Grimm, M. Hochbruck, Residual, restarting and Richardson iteration for the matrix exponential. // To appear in SIAM J. Sci. Comput., accepted in February 2013.
4. M.A. Botchev, A block Krylov subspace time-exact solution method for linear ODE systems. To appear in Numer. Lin. Algebra Appl., accepted in December 2012.

A SIMPLE EULERIAN FINITE-VOLUME METHOD FOR COMPRESSIBLE FLUIDS IN DOMAINS WITH MOVING BOUNDARIES

A. Chertock¹

¹*North Carolina State University, Raleigh, NC, USA,
chertock@math.ncsu.edu*

We introduce a new simple Eulerian method for treatment of moving boundaries in compressible fluid computations. Our approach is based on the extension of the interface tracking method we have recently introduced in the context of multifluids and may be used in conjunction with one's favorite finite-volume method. The robustness of the new approach is illustrated on a number of 1-D- and 2-D examples.

In this talk, I will present a finite-volume method for computing compressible fluids in the domains with moving boundaries. Our approach is based on the extension of the interface tracking method we recently introduced in the context of multifluids. To this end, we consider a model governed by the compressible Euler equations and place the fluid domain into the computational domain of a fixed size, which is divided into Cartesian cells. At every time moment, each cell is marked as either internal, external, or boundary one. The internal cells are fully occupied by the gas; the external cells are located outside of the fluid domain and play the role of the so-called ghost cells, while the boundary cells form a thin layer between the internal and external ones. The boundary cells have to be introduced since in the case of moving boundaries, the fluid domain boundary cannot, in general, be forced to coincide with the cell edges. As a result, the boundary cells are only partially filled with the gas, which is very inconvenient since within the finite-volume computational framework numerical solutions are represented in terms of the cell averages. One of the possible ways to treat the boundary cells is to split each of them into two smaller cells: the internal and the external ones. However, this would significantly increase the complexity of the entire solution algorithm and may lead to very small time steps. We prefer an alternative, simpler approach, in which the averages are computed over the internal cells only and the data contained in the boundary cells are not used for the computation of numerical fluxes. Namely, we only approximate the point values at the edges of these cells, required in the numerical flux computations. These point values are obtained using the solid wall extrapolation followed by the interpolation in the phase space (by solving the Riemann problem between the internal cell averages and the extrapolated ones). The numerical solution is then evolved in time in internal cells only.

The proposed computational framework is general and may be used in conjunction with one's favorite finite-volume method. In this talk, I will discuss the semi-discrete second-order central-upwind scheme. This Godunov-type scheme enjoys all major advantages of Riemann-problem-solver-free, non-oscillatory central schemes and, at the same time, have a certain "built-in" upwind nature. The robustness and accuracy of the new approach will be illustrated on a number of one- and two-dimensional numerical examples.

BOUNDARY CONDITIONS FOR HIGH-RESOLUTION SIMULATIONS OF WAVES

T. Hagstrom¹

¹*Southern Methodist University, Dallas, TX USA,
thagstrom@smu.edu*

We discuss various problems related to the use of high-resolution difference methods to simulate wave propagation in the time domain. These include the construction of stable boundary closures and convergent sequences of radiation boundary conditions.

Wave propagation problems of interest in science and technology are typically posed on complex and unbounded spatial domains. In free space it is well-understood that high-resolution discretizations on structured grids are remarkably efficient, allowing accurate long-range propagation with minimal degrees-of-freedom per wavelength and minimal flops per degree-of-freedom to evaluate the approximate derivatives. The challenges in applying such efficient methods for realistic problems are all associated with boundaries: physical boundaries where difference stencils must be modified (e.g. become one-sided at the edge of a grid line) and artificial boundaries where approximate radiation conditions must be imposed. In this talk we will discuss our ongoing work to address these problems.

For one-sided differencing we have introduced a concept of grid-stabilization, which involves the addition of one or two subgrid nodes near grid boundaries [1,2]. The method works well for closing difference formulas of orders up to 12. Its analysis using Laplace transforms is of some interest; for second order systems we generally detect oscillatory modes of boundary layer type which we conjecture are not dangerous from the point of view of stability. (See also [3].) To treat complex geometry we have implemented these methods on overlapping, mapped structured grids, though a complete analysis of stability with overlapping grids is not yet available. We will also discuss our efforts to derive grid-stabilized formulas satisfying summation-by-parts conditions (e.g. [4]) and to construct stable closures for methods based on Fourier continuation [5] or band-limited interpolation [6].

Most methods for imposing near-field radiation boundary conditions which are in current use suffer from one or more severe limitations. Accurate methods can be constructed using space-time integral representations of the solution and its normal derivative at the artificial boundary. However, the efficient implementation of these methods requires special boundaries (e.g. spheres) and associated complex harmonic transforms [7]. Simpler local methods such as high-order sequences of approximate radiation conditions [8] or perfectly matched absorbing layers [9] can lose accuracy as the simulation time is increased [10,11]. We have identified the source of this loss of accuracy as the poor treatment of evanescent modes. This has led to the development of a new sequence of local radiation boundary conditions, which we call Complete Radiation Boundary Conditions (CRBC), which provide uniform accuracy over arbitrary time intervals [12,13]. Directly, they are constructed as uniform

rational interpolants of the exact radiation condition on Laplace inversion contours in the right half-plane. We will present the construction and analysis of CRBCs for simple isotropic wave systems, and discuss their practical application on computational domains with corners and edges [14,15]. Lastly we will consider their generalization to more complex systems such as the elastic wave equation [16]. Here we prove that stable formulations are always possible, even for anisotropic models of crystalline materials. The open question is to determine the optimal bounds on the complexity.

Acknowledgement: This work was supported by ARO grant W911NF-09-1-0344, NSF grant OCI-0904773, and BSF grant 890020. Any conclusions or recommendations in the paper are those of the author and do not necessarily represent the views of the ARO, NSF, or BSF.

References:

1. T. Hagstrom, G. Hagstrom, *J. Comput. Phys.*, 223:316-340, 2007.
2. T. Hagstrom, G. Hagstrom, *J. Comput. Phys.*, 231:7907-7931, 2012.
3. M. Motamed, H.-O. Kreiss, preprint, 2013.
4. B. Strand, *J. Comput. Phys.*, 110:47-67, 1994.
5. M. Lyon, *SISC*, 33:3241-3260, 2011.
6. J. Knab, *IEEE Trans. Inform. Th.*, 25:717-720, 1979.
7. B. Alpert, L. Greengard, T. Hagstrom, *SINUM*, 37:1138-1164, 2000.
8. T. Hagstrom, T. Warburton, *Wave Motion*, 39:327-338, 2004.
9. J.-P. Berenger, *J. Comput. Phys.*, 114:185-200, 1994.
10. J. Diaz, P. Joly, *SIAM J. Appl. Math.*, 65:1547-1575, 2005.
11. A. de Hoop, P. Van den Berg, R. Remis, *IEEE Trans. Magn.*, 38:657-660, 2002.
12. T. Hagstrom, T. Warburton, *SINUM*, 47:3678-3704, 2009.
13. V. Druskin, M. Guddati, T. Hagstrom, arXiv:1210.7862, 2012.
14. K. Stein, Ph.D. Thesis, Southern Methodist University, 2012.
15. S. Kim, T. Hagstrom, preprint, 2013.
16. D. Baffet, J. Bielak, D. Givoli, T. Hagstrom, D. Rabinovich, *CMAME*, 241-244:30-37, 2012.

NUMERICAL EVIDENCE OF MULTIPLE SOLUTIONS FOR THE REYNOLDS--AVERAGED NAVIER--STOKES EQUATIONS FOR HIGH--LIFT CONFIGURATIONS

**D.S.Kamenetskiy¹, J.E.Bussoletti¹, C.L.Hilmes¹
F.T.Johnson², V.Venkatakrishnan¹, L.B.Wigton¹**

¹*Boeing Commercial Airplanes – Everett, WA, USA*

²*Boeing Commercial Airplanes , retired*

В настоящей работе представлены примеры неединственных полностью сошедшихся численных решений осредненных уравнений Навье-Стокса с

различными моделями турбулентности для аэродинамических конфигураций при больших углах атаки.

In this paper we present evidence for the existence of multiple machine zero-converged numerical solutions of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (RANS) with the one-equation Spalart-Allmaras (SA) and two-equations Wilcox k-Omega turbulence models on fixed grids in 3D and describe how they were obtained.

The results in this paper were obtained with the two Boeing research solvers *pilot3d* and *supgNd*. Both have many features in common but were developed independently and so have some differences in the discretization and solver implementations.

Both codes use purely tetrahedral grids and use finite element SUPG(1) (linear elements, second order) discretization [1] of the fully coupled system of RANS+SA equation in 3D. Both solvers use Newton's method in combination with time stepping to the steady state and with rather sophisticated heuristic adjustment of the local time step based on the behavior of line search and linear solver. To eventually achieve super-linear convergence to a zero of the steady-state residual it is necessary to have the exact Jacobian and to push the time step as far as possible towards infinity. The linear solver at each Newton iteration is a right-preconditioned GMRES method with an incomplete LU factorization with drop tolerance (ILUT) on each subdomain as the preconditioner. The *supgNd* solver can optionally use implicit residual smoothing (IRS) mechanism [2] to accelerate convergence to the steady-state.

With this structure of the linear solver the codes allow efficient parallel implementation using MPI. Though significantly more expensive than existing finite-volume production solvers if measured per core, both Boeing codes have shown to be very efficiently scalable. More details on the discretization and solver strategies used in GGNS may be found in the reference [3].

The baseline test case used in this work is trap wing (prototype) high-lift configuration which was used as a baseline for the AIAA 1st High Lift Workshop [4].

The first indications of the multiple machine-zero converged solutions with GGNS codes were obtained when the *pilot3d* and *supgNd* solvers generated two very different solutions at 28 degree angle of attack (AoA), one definitely showing the post-stall amount of separation. Cross-rerunning the two codes from the other solver's solution as initial guess has confirmed that there exists at least 2 machine-zero converged solutions on the same grid for each solver at this angle of attack.

With realization that the choice of initial guess may be the key ingredient for running a non-linear solver into the different basin of attraction, systematic effort was made to trace dependence of the steady-state solutions on the initial guess. With the *supgNd* solver by changing the way the viscous wall boundary condition was enforced at the beginning of the time-stepping iterations we were able to find up to 4 distinct, machine-zero converged solutions on the coarse Workshop grid (with ~3.6 million grid points).

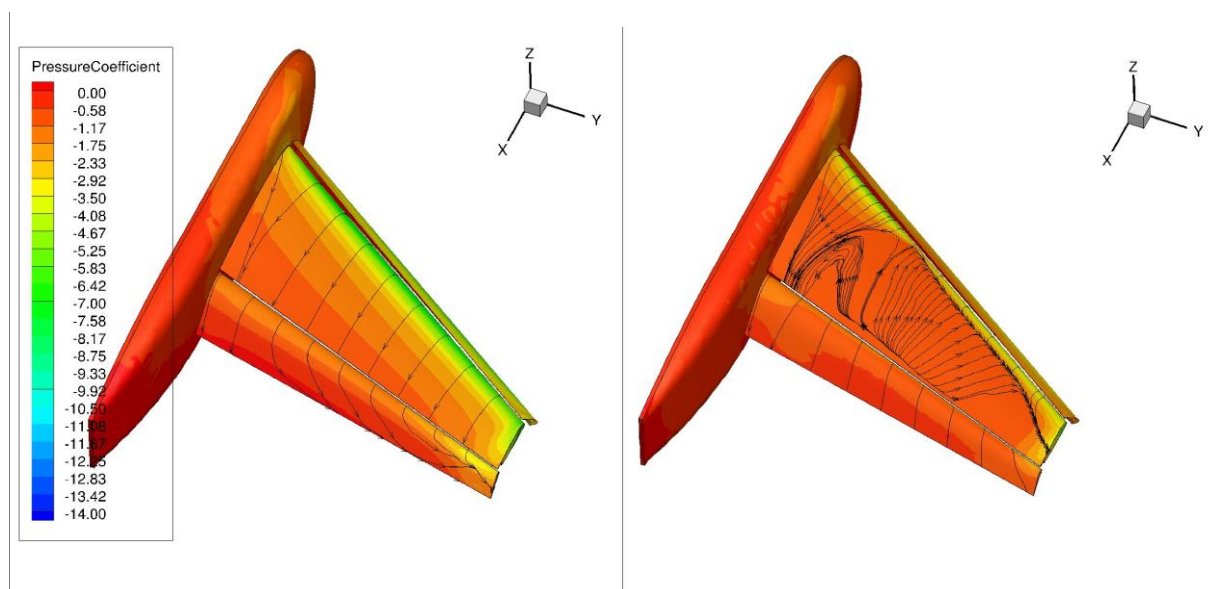
Independently switching the implicit residual smoothing mechanism in the *supgNd* code (initially intended to accelerate convergence) led to the discovery of

four more solutions on the coarse grid (the runs were done with different values of the IRS weight), the overall number of solutions for this grid at $\text{AoA}=28^\circ$ thus settling at 8. We note that the distinct character of all these solutions was confirmed by re-running *pilot3d* from each of them as an initial guess. Example of two different solutions for the coarse grid obtained with the SA model is shown on figures below.

Applying these techniques also for the Workshop medium ($\sim 11\text{M}$ nodes) and fine ($\sim 32\text{M}$) grids, we were able to obtain 6 solutions on the medium grid and 2 solutions (so far) on the fine grid.

The different solutions on the same grid differ mostly by the amount of smooth-body flow separation: the position of the separation line(s) on the main element and flap as well as by the topological structure of the separation pattern. It is remarkable that though attempts were made to capture more solutions by changing the free parameters in the initial guess settings as well as the implicit residual smoothing mechanism (the overall number of runs for the coarse grid may be estimated at about 100), we were only able to find 8 distinct solutions on this grid.

With similar techniques, for the trap wing case, we were able to numerically find complete ‘multiple-solution branches’ for the whole sweep of high angles of attack (from 24° to 35°).



References:

1. Hughes T.J.R, “Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations”, (1987) Intl. J. for Num. Meth. in Fluids, Vol. 7, pp. 1261—1275
2. Jameson A., Baker T.J. “Solution of the Euler equations for complex configurations”// (1983), AIAA Paper 83-1929, Proc. AIAA 6th CFD Conf., Danvers, MA, pp. 293-302.
3. Johnson F.T., Kamenetskiy D.S, Melvin R.G., Venkatakrishnan V., Wigton L.B., Young D.P., Allmaras S.R., Bussoletti J.E., Hilmes C.L. “Observations Regarding Algorithms Required for Robust CFD Codes”// Mathematical Modelling of Natural Phenomena, (2011), 6(03), pp. 2-27, doi:10.1051/mmnp/20116301

4. 1st AIAA CFD High-Lift Prediction Workshop (HighLiftPW-1),
<http://hiliftpw.larc.nasa.gov/index-workshop1.html>

D.S.Kamenetskiy¹, J.E.Bussoletti¹, C.L.Hilmes¹, F.T.Johnson²,
 V.Venkatakrisnan¹, L.B.Wigton¹

«Numerical Evidence of Multiple Solutions for the Reynolds--Averaged Navier--
 Stokes Equations for High--Lift Configurations»

¹*Boeing Commercial Airplanes – Everett, WA, USA,*

dmitry.s.kamenetskiy@boeing.com

²*Boeing Commercial Airplanes , retired*

IONIZATION-ASSISTED RELATIVISTIC ELECTRON GENERATION WITH MONOENERGETIC FEATURES FROM LASER THIN FOIL INTERACTION

A.V. Karpeev, I.V. Glazyrin, O.G Kotova

*Russian Federal Nuclear Center –
 E.I.Zababakhin Research Institute of Technical Physics,
 a.v.karpeev@vniitf.ru*

The concept of ionization-induced injection into the laser pulse to produce quasi-monoenergetic bunches of electrons from ultra-thin solid dense targets is analyzed.

A concept for the generation of relativistic electron bunches with quasimonoenergetic features in the interaction of a high intensity laser pulse with overdense plasma has already been demonstrated for an ultra-thin foil [1]. When the laser pulse propagates through semi-transparent foil the electrons from inner atom shells remain bound during the rise time of the laser pulse and are ionized by the laser intensity near its maximum amplitude, which satisfies the best injection condition for subsequent acceleration. The 2D3V PIC code PICNIC was used for simulation of a linearly polarized laser pulse with a wavelength $\lambda=1.053\text{ }\mu\text{m}$ normally incident onto nano-sized DLC target. We performed simulations for 3 cases: (1) 5 nm carbon foil ionized due to field ionization (FI); (2) the same, but already ionized foil, i.e. the foil in the form of a plasma slab with average charge $\langle Z \rangle=3.4$; (3) 42 nm carbon foil with FI. Comparison of the results obtained with different target models shows that a correct description of the interaction of a high contrast laser pulse with an ultra-thin solid dense target should include the FI effect. It was found that for the case (1) a bunch of quasimonoenergetic electrons from inner atom shells moves co-directionally with laser pulse and acquire energy $\sim m_e c^2 a^2/2$.

References

D. Kiefer et al., Eur.Phys. J. D, **55**, 427 (2009).

A.V. Karpeev

«Ionization-assisted relativistic electron generation with monoenergetic features from laser thin foil interaction»

Russian Federal Nuclear Center – E.I.Zababakhin Research Institute of Technical Physics, a.v.karpeev@vniitf.ru

CENTRAL SCHEMES: A POWERFUL BLACK-BOX SOLVER FOR NONLINEAR HYPERBOLIC PDES

A. Kurganov¹

¹*Tulane University, New Orleans, USA,
kurganov@math.tulane.edu*

The talk will be focused on non-oscillatory central schemes, which are simple, efficient, highly accurate and robust Godunov-type finite-volume methods for general hyperbolic systems of conservation laws. I will first show their derivation and then several recent applications.

I will first give a brief description of Godunov-type finite-volume methods for general hyperbolic systems of conservation laws. These methods consist of two types of schemes: upwind and central. My lecture will focus on the second type - non-oscillatory central schemes.

Godunov-type schemes are projection-evolution methods. In these methods, the solution, at each time step, is interpolated by a (generically discontinuous) piecewise polynomial interpolant, which is then evolved to the next time level using the integral form of conservation laws. Therefore, in order to design an upwind scheme, (generalized) Riemann problems have to be (approximately) solved at each cell interface. This however may be hard or even impossible.

The main idea in the derivation of central schemes is to avoid solving Riemann problems by averaging over the wave fans generated at cell interfaces. This strategy leads to a family of universal numerical methods that can be applied as a black-box-solver to a wide variety of hyperbolic PDEs and related problems. At the same time, central schemes suffer from (relatively) high numerical viscosity, which can be reduced by incorporating of some upwinding information into the scheme derivation - this leads to central-upwind schemes, which will be presented in the lecture.

During the talk, I will show a number of recent applications of the central schemes.

BOUNDARY IN CELL (BIC) METHOD FOR GAS-SOLID DYNAMICS SIMULATIONS

I. Menshov

*Keldysh Institute for Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences
Miusskay sq., 4, Moscow 125047, Russia;
menshov@kiam.ru*

We develop a finite-volume technique for solving the compressible non-stationary Euler equations in complex domains bounded by surfaces of moving solid bodies. This technique is a kind of the embedded or immersed boundary method where the computational grid covers the whole computational domain including solid regions, and the solid boundary is treated independently on the base grid. The method is based on the Godunov approach. Calculations are performed over the whole domain with the same algorithm for all cells; no special interpolation scheme near the solid boundary is involved. The effect of the solid surface is taken into account by means of in some sense fictitious (artificial) fluxes of mass, momentum, and energy. These fluxes are added to cut cells so that the solution in the exterior to the solids would be the same as that of the original boundary value problem. The method proposed is shown to be more flexible, robust, and efficient than other methods based on the immersed boundary approach.

This paper addresses a numerical technique for solving non-stationary compressible Euler equations in a region external to solid objects that may move in space with a prescribed law of motion (forced motion) or due to interaction with the gas (free motion). The method we propose pertains to the class of embedded (immersed) boundary approaches.

In an embedded boundary approach the computational domain (that includes both gas and solid regions) is discretized with a grid (structured or unstructured) and solid surfaces intersect computational cells in an arbitrary fashion. The main advantage of the embedded boundary method compared with body fitted grid approaches is the simplicity of grid generation, and the possibility to discard regridding (to accommodate changes in geometry due to solid motion) from calculations.

The penalty for this simplicity of course emerges that consists in the problem of the solid surface treatment, in particular the cut cell problem – how to calculate flow parameters in the cells that are cut by the solid surfaces?

Since pioneering works by C. Peskin (1977) there were many efforts to cope with this problem, which can be classified into two groups. One is based on the finite volume formulation. In this approach a naive finite volume discretization is applied to fractional cells forming due to base grid cell cutting. This way faces many difficulties, such as “small cell problem”, uprising new gas cells and collapsing cells in consequence of solid motion, etc. (Pember et al. (1995)). The other group of methods is based on finite-difference discretizations and employing rather sophisticated interpolation schemes to treat the boundary conditions at solid surfaces. These methods are mostly developed for incompressible flow problems. Their

generalization to compressible flows is in somewhat tricky problem due to the presence of shock waves and other discontinuities.

We propose a novel approach to treat the boundary conditions in the framework of the embedded boundary method. We name it as “boundary in cell (BIC)” method. It is applicable to compressible flows, very flexible, and formulated in a unique way with no use any special interpolating schemes for solid surfaces.

The BIC method much relies on fundamental ideas of the Godunov approach. A key point of this method is an alternative mathematical formulation of the problem under consideration. The conventional statement is to solve the Euler equations exterior of the solids with boundary conditions (b.c.) at the solid surface (Γ) $(\vec{U} - \vec{U}_s, \vec{n}) = 0$, where \vec{U} is the velocity vector, \vec{n} is the outward normal, the underscript “s” means solid velocity.

The alternative formulation can be obtained in the following way. Let’s for a moment suppose that gas occupies all domain (including regions of solids) and the solid surface is permeable. Then the gas flow can be described by the system of integral conservation relations for an arbitrary domain Ω bounded by s :

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega + \int_s \mathbf{f}_i n_i dS = 0$. Of coarse, the b.c. will not satisfy in this case. If we restore Γ again as non-permeable, the flow outside will change to adopt the b.c. We try to take into account this process by means of some fictitious fluxes that are introduced locally at the solid surface to compensate the loss of mass, momentum, and energy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega + \int_s \mathbf{f}_i n_i dS = - \int_{\gamma(\Omega)} \mathbf{F}_w dS \quad (1)$$

where $\gamma(\Omega) = \Gamma \cap \Omega$

Compensating fluxes \mathbf{F}_w are defined so that the solution of (1) in exterior of the solid and the solution to the conventional problem with b.c. are completely matched. One can prove that this can be achieved by means of the following choice:

$$\mathbf{F}_w = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u} - \vec{U}_s, \vec{n}) \\ \rho(\vec{u} - \vec{U}_s, \vec{n})\vec{u} + (p - p_w)\vec{n} \\ \rho(\vec{u} - \vec{U}_s, \vec{n})E + (p\vec{u} - p_w\vec{U}_s, \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

where the subscript “w” means the pressure that occurs at the solid surface in consequence of the flow reaction to the presence of the solid obstacle.

Thus, the BIC method is to integrate (1) and (2) throughout the whole domain. We accomplish this with the second order Godunov method. The fluxes for all cell faces (those bounded the cell itself and those in cell) are treated in the same manner through the solution of the Riemann problem. There are some technical details of the method that are omitted due to limited space of the present abstract, which will be reported in the final paper.

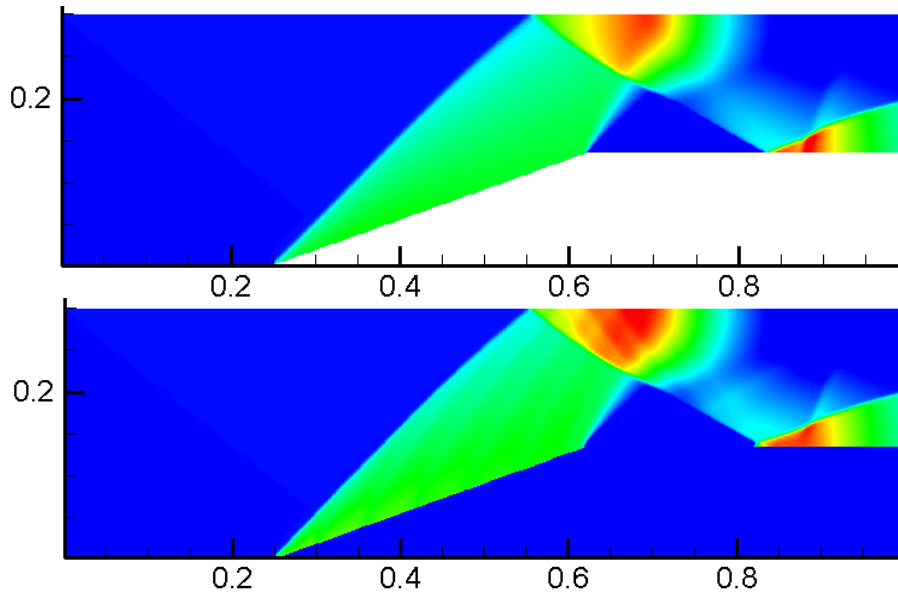
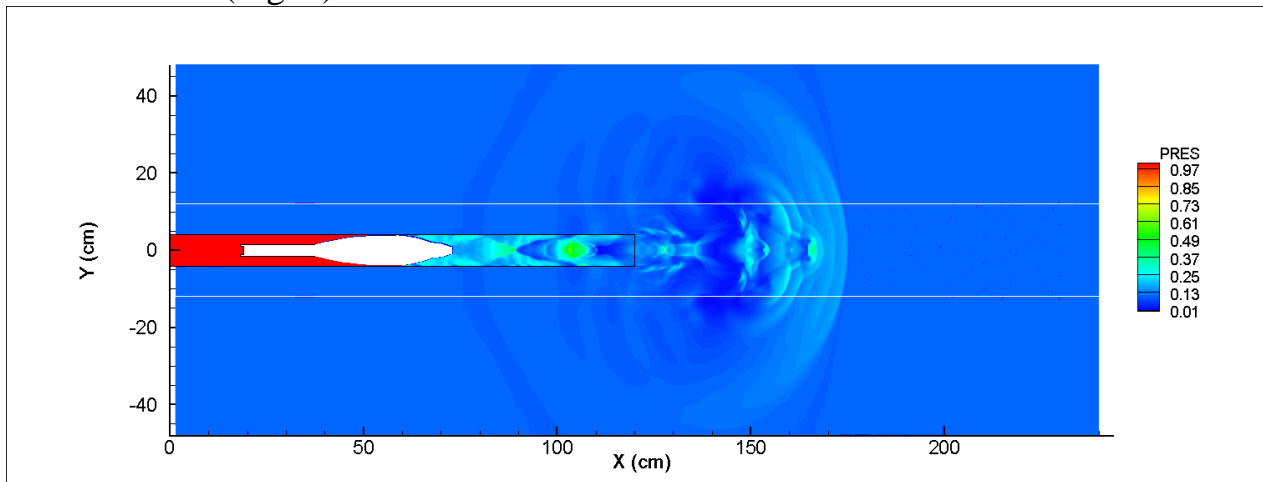


Figure 1: Instantaneous pressure field: 20 deg wedge, $M=1.6$, body fitted grid calculation (upper), BIC's calculation (lower).

Here we show some results that demonstrate capabilities of the BIC method. First problem is the $M = 1.6$ flow around a 20° wedge. Calculations are performed with a conventional body fitted grid and a Cartesian grid by means of the BIC method. Results are compared in Fig. 1.

Another is the simulation of a shooting process. There is a very small clearance (0.37% of the barrel diameter) between the projectile and the barrel, through which explosive gas can release the compressed region. Use of a body fitted grid is impractical, whereas the BIC method successfully copes with all difficulties of this simulation (Fig. 2).



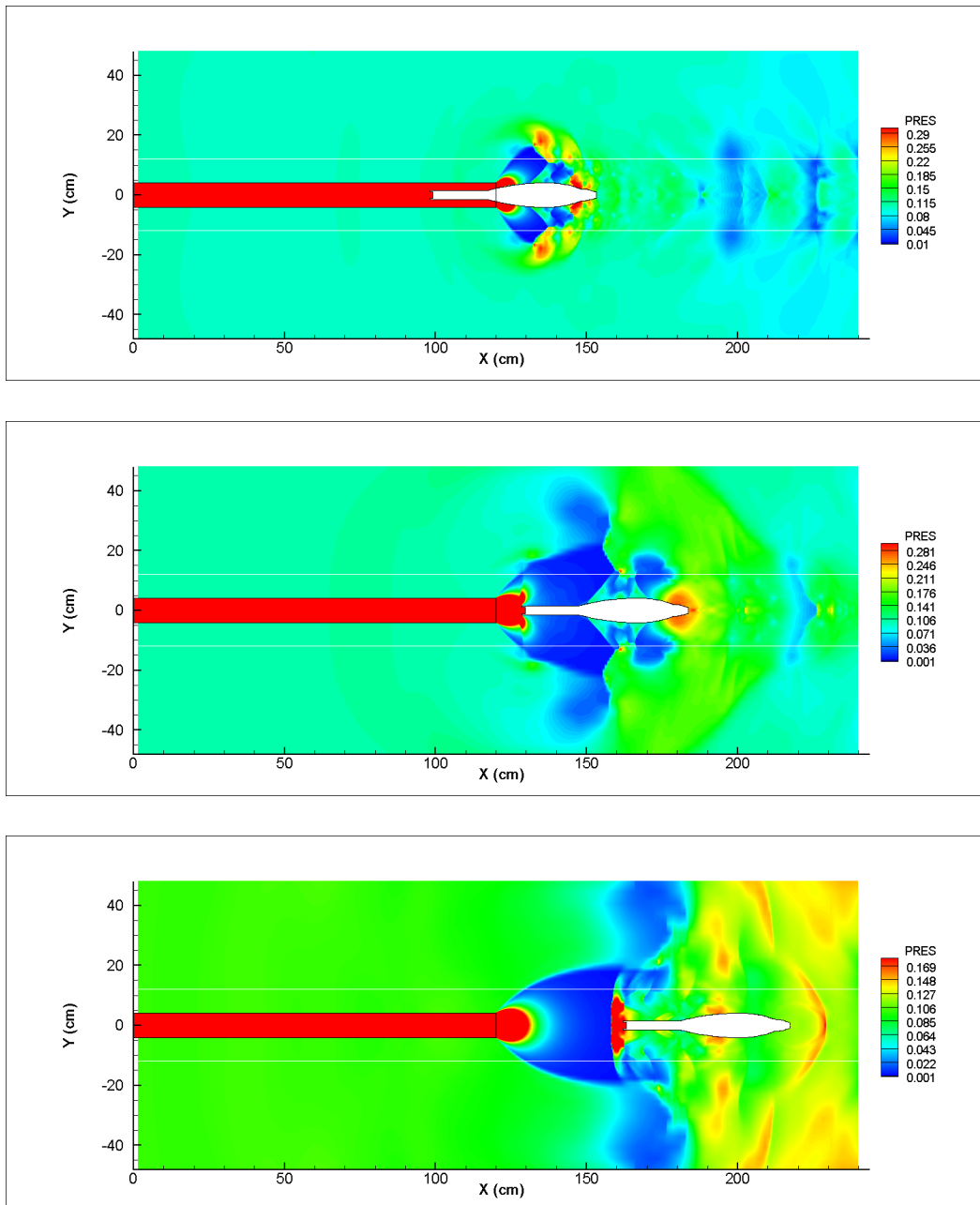


Figure 2: Pressure field for several time moments for the shooting process simulation.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 12-01-00915-a).

References:

- Peskin C.S. 1977 Numerical analysis of blood flow in the heart, J. Comput. Phys., Vol 25, pp. 220–252.
- Pember R. B., Bell J. B., Colella P., Crutchfield W. Y. and Welcome M. L. 1995 An adaptive Cartesian grid method for unsteady compressible flow in irregular regions, J. Comput. Phys., Vol. 120 pp. 278-304.
- Mittal R. and Iaccarino G. 2005 Immersed boundary methods, Annu. Rev. Fluid.Mech., Vol. 37, pp. 239-261.

FINITE ELEMENTS METHOD FOR MATHEMATICAL MODELING OF 3-D BI-ISOTROPIC WAVEGUIDE

Yu.V. Mukhartova, N.A. Bogoliubov, A.G. Sveshnikov

*Moscow State University, department of physics
Address: Leninskiye gory, Moscow, 119991, Russia,
mukhartova@yanex.ru*

This work presents the investigation of a waveguide with Oz axis and the cross-section $S = \{(x, y): x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ with perfectly conducting walls and nonuniform filling in a form of a bi-isotropic material insertion. The artificial materials, or metamaterials, that are strongly interacting with electromagnetic field, are currently actively developed and created. Bi-isotropic medium is the most general case of linear isotropic medium. Its distinctive feature is the existence of the electromagnetic coupling, so the electric or magnetic field acting on such medium produces both polarization and magnetization, unlike ordinary dielectrics and magnetics:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = a_{11}\mathbf{E} + a_{12}\mathbf{H} \\ \mathbf{B} = a_{21}\mathbf{E} + a_{22}\mathbf{H} \end{cases}$$

where $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ are constants.

Thereby the development of effective algorithms for calculating electromagnetic field in such media is a challenging problem. A numerical algorithm for calculating electrical field inside the insertion, excited by an incident normal wave or a combination of normal waves, is proposed. The algorithm is based on solving the boundary problem in the full vector statement, using partial radiation conditions. However in the case of electromagnetic problems in such statement the finite elements method can give spurious solutions. The method of mixed finite elements effectively suppresses spurious solutions, but it possesses less accuracy than the Lagrangian finite elements method. The numerical algorithm for calculating propagation constants presented in this work is based on specific generalized statement of the vector problem, and it permits to use the Lagrangian finite elements without nonphysical solutions.

Consider nonsingular case, when $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. We will study the spectral problem for the field with harmonic time dependence of the form $e^{-i\omega t}$. Excluding vector \mathbf{H} from Maxwell's equations and taking into account the nonsingularity of the medium we obtain:

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{E} = ik(a_{21} - a_{12})\text{rot } \mathbf{E} + k^2(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})\mathbf{E}, \\ \text{div } \mathbf{E} = 0, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}]_{\partial S} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $k = \omega/c$. Let's search for the solution corresponding the traveling wave: $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{i\gamma z}$.

Consider an arbitrary rather smooth vector-function $\mathbf{E}^*(x, y) = \{E_1^*(x, y), E_2^*(x, y), E_3^*(x, y)\}$ that satisfies boundary conditions for perfectly conducting walls.

Thus the problem can be formulated as follows: *we must find the propagation constants γ and the corresponding vector-functions $\mathbf{E}(x, y) = \{E_1(x, y), E_2(x, y), E_3(x, y)\}$ with components belonging to the Sobolev space $W_2^1(S)$; the contractions of $E_j(x, y)$, $j=1,2,3$, on the boundary ∂S must satisfy the conditions*

$$E_1|_{y=0} = E_1|_{y=b} = E_2|_{x=0} = E_2|_{x=a} = E_3|_{x=0} = E_3|_{x=a} = E_3|_{y=0} = E_3|_{y=b} = 0, \quad (2)$$

and the functions $E_j(x, y)$ are governed by the equation

$$\begin{aligned} & \iint_S \left\{ 2 \frac{\partial E_1}{\partial x} \frac{\partial E_1^*}{\partial x} + \frac{\partial E_1}{\partial y} \frac{\partial E_1^*}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial x} \frac{\partial E_2^*}{\partial x} + 2 \frac{\partial E_2}{\partial y} \frac{\partial E_2^*}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial x} \frac{\partial E_3^*}{\partial x} + \frac{\partial E_3}{\partial y} \frac{\partial E_3^*}{\partial y} \right\} ds + \\ & + \iint_S \left\{ \frac{\partial E_1}{\partial x} \frac{\partial E_2^*}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial y} \frac{\partial E_1^*}{\partial x} \right\} ds + i\gamma \iint_S \left\{ -\frac{\partial E_1}{\partial x} E_3^* - \frac{\partial E_2}{\partial y} E_3^* + E_3 \frac{\partial E_1^*}{\partial x} + E_3 \frac{\partial E_2^*}{\partial y} \right\} ds - \\ & - ik(a_{21} - a_{12}) \iint_S \left\{ \frac{\partial E_3}{\partial y} E_1^* - \frac{\partial E_3}{\partial x} E_2^* + \frac{\partial E_2}{\partial x} E_3^* - \frac{\partial E_1}{\partial y} E_3^* \right\} ds - \gamma k(a_{21} - a_{12}) \iint_S \{E_2 E_1^* - E_1 E_2^*\} ds + \\ & + \gamma^2 \iint_S \{E_1 E_1^* + E_2 E_2^* + 2E_3 E_3^*\} ds - k^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \iint_S (\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) ds = 0 \end{aligned}$$

for an arbitrary vector-function $\mathbf{E}^*(x, y)$ with components belonging to $W_2^1(S)$ and satisfying (2).

The finite elements method is used for the numerical solution of the problem. Consider $N_{ij}(x, y)$ are the Lagrangian basic functions, and

$$E_k(x, y) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J E_{ij}^k N_{ij}(x, y), \quad k=1,2,3 \quad (3)$$

are the approximate solutions. Taking the boundary conditions into account, we come to the nonlinear eigenvalue problem

$$\gamma^2 AX + \gamma BX + CX = 0, \quad (4)$$

The problem (4) can be transformed to the linear one by means of the additional unknown vector $Y = \gamma X$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -C & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (5)$$

The proposed algorithm was tested for the waveguide with the uniform isotropic filling. The numerical results corresponded well to the theoretical solutions, and no the spurious modes were obtained. The described method can be easily generalized for the waveguide with the laminated filling. These algorithms can then

be used for multiple solving the direct problem, when solving the inverse problem of synthesis of a material with preset features.

References

1. I.V. Lindell, A.H. Sihvola, "Bi-isotropic constitutive relations", *Microwave and Opt. Tech. Lett.*, Vol.4, pp.295-297, 1991.
2. A.N.Bogolyubov, A.L. Delitzin, "The calculation of dielectric waveguides using the method of finite elements, eliminating the appearance of nonphysical solutions", *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Fizika*, No 1, pp. 9-13, 1996.
3. A.N.Bogolyubov, N.A. Mosunova, "The calculation of propagation constant of a rectangular chiral waveguide using the method of mixed finite elements", *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Fizika*, No 3, pp. 22-24, 2007.
4. A.N.Bogolyubov., Gao Jxing, Yu.V.Mukhartova, "*The excitation of electromagnetic oscillations in the area with chiral filling*", *Computational mathematics and mathematical physics*, Vol.51, №9. pp. 1721-1728, 2011.

ON HIGH DISPERSION TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF THE KORTEWEG-DE VRIES BURGERS EQUATION

M. D Salas

*NASA Langley Research Center, Hampton, VA, USA,
manny.salas@cox.net*

Classical fluid mechanics deals with dissipation dominated shock waves where the flow transitions rapidly, but monotonically, from one flow state to another. A simple model for this type of phenomenon is the Burgers equation [1],

$$\partial_t v + v \partial_x v - \varepsilon \partial_{xx} v = 0,$$

where v is the velocity, x is the space variable, t is time and ε is the coefficient of viscosity. This model has only one reference scale, the shock wave thickness, given by $8\varepsilon/[v]$, where $[v]$ is the jump in velocity across the shock.

However, there are physical situations, such as an undular bore in shallow water [2], ion-acoustic shock waves [3] and laser induced blast waves in a Bose-Einstein condensate [4], among others, where shock waves are dominated by dispersion. A prototype model equation for these dispersive shock waves is the Korteweg-de Vries (KdV) equation [5],

$$\partial_t v + v \partial_x v + \delta \partial_{xxx} v = 0,$$

where δ is the coefficient of dispersion. A non-periodic solution of the KdV equation is a self-reinforcing solitary wave, or soliton, whose wave width depends on its amplitude. Other solutions consist of packets of solitons. Unlike viscous shocks, these dispersive shock packets consist of a head wave followed by a damped (modulated) wave train which can extend for very long distances.

There are other phenomena, such as the flow of liquids containing small gas bubbles [6], which are best modeled by an equation that combines the characteristics of the Burgers and KdV equations; this is the Korteweg-de Vries Burgers (KdV-Burgers) equation. Reviews of these models can be found in references [7][8]. The purpose of this paper is to conduct a numerical study the properties of traveling wave solutions of the KdV-Burgers equation in the range of high dispersion and low dissipation. In this range, Johnson [9] obtained an asymptotic solution consisting of a damped cnoidal (a Jacobi elliptic cosine) wave matched to the solitary wave solution of the KdV equation and Liu and Liu [10] claimed an "analytic solution" consisting of a damped sinusoidal wave loosely joined to the solitary wave solution of the KdV equation. As we will show, the Liu-Liu solution is not a solution of the KdV-Burgers equation, but of a linearization of this equation.

The numerical study shows that the wave damping rate correlates with the wave damping rate of the linear solution of [10]. An estimate of the wave train wavelength as a function of the Reynolds number is presented. It is shown that at distances of the order of the wave train width the individual wavelength asymptotes to the wavelength of the linear solution. A study of the turbulence characteristics of the computed solutions reveals little turbulence like behavior, except for the energy decay rate in the inertial-range which agrees with that observed in the Burgers equation.

References

- [1]. Burgers, J. M. 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.* 1:171-199.
- [2]. El, G. A., Grimshaw, R. H. J. and Kamchatnov, A. M. 2007. Evolution of solitary waves and undular bores in shallow-water flows over gradual slope with bottom friction. *J. Fluid Mech.* 585:213-244.
- [3]. Nakamura, Y., Bailung, H. and Shukla, P. K. 1999. Observation of ion-acoustic shocks in a dusty plasma. *Phys.Review Letters.* 83:1602-1605.
- [4]. Hoefer, M. A. 2006. Dispersive shock waves in Bose-Einstein condensates and nonlinear nano-oscillators in ferromagnetic thin films. Ph.D. Thesis, University of Colorado.
- [5]. Korteweg D. J. and De Vries, G. 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.* 39:422-443.
- [6]. Van Wijngaarden, L. 1972. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 4:369-396.
- [7]. Jeffrey, A. and Kakutani, T. 1972. Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centered around the Korteweg-de Vries equation. *SIAM Reviews* 14:582-643.
- [8]. Miles, J. W. 1981. The Korteweg-de Vries equation: a historical essay. *J. Fluid Mech.* 106:131-147.
- [9]. Johnson, R. S. 1970. A non-linear equation incorporating damping and dispersion. *J. Fluid Mech.* 42:49-60.
- [10]. Liu, S. and Liu, S. 1992. KdV-Burgers equation modeling of turbulence. *Science in China, Series A.* 35:576-586.

ADER SCHEMES FOR EVOLUTIONARY PDES: A REVIEW

E. Toro

University of Trento, Italy

ADER is a fully discrete approach for constructing one-step, non-linear numerical schemes of arbitrarily high order of accuracy in both space and time to solve evolutionary partial differential equations. The approach was first put forward by Toro et al. [1] for linear problems on Cartesian meshes, where the schemes were formulated for one, two and three space dimensions; reported implementations for linear schemes (fixed stencils) for one and two space dimensions included computations of up to 10-th order of accuracy in both space and time. The implementation of ADER schemes requires two ingredients (a) a high-order non-linear spatial reconstruction, once per time step, and (b) the solution of the generalized (or high-order) Riemann problem at each cell interface, also once per time step. Here the generalized Riemann problem is the Cauchy problem for the relevant system with piece-wise smooth initial data (eg. polynomials), with source terms included. Further developments of the ADER methodology, including nonlinear systems, multiple space dimensions, structured meshes and unstructured meshes are found, for example, in Refs. [2] to [14]. An introduction to ADER schemes and a review are given in chapters 19 and 20 of Toro's book [15]. Recent work on the ADER approach aims at simplifying the schemes. Examples of applications will be shown.

References

- [1] E.F. Toro, R.C. Millington and L.A. M Nejad. Towards very high-order Godunov schemes. In *Godunov Methods: Theory and Applications*. Edited Review. E.F. Toro (Editor). Kluwer Academic/Plenum Publishers. Conference in Honour of S. K. Godunov. Vol. 1, pages 897- 902. New York, Boston and London, 2001.
- [2] T. Schwartzkopff, C. D. Munz, and E. F. Toro. ADER: High-Order Approach for Linear Hyperbolic Systems in 2D. *J. Scientific Computing*, 17:231–240, 2002.
- [3] E.F. Toro and V.A. Titarev. Solution of the generalised Riemann problem for advection-reaction equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. Vol. 458, pages 271-281, 2002.
- [4] V.A. Titarev and E.F. Toro. ADER: arbitrary high order Godunov approach. *Journal of Scientific Computing*. Vol. 17, pages 609- 618, 2002.
- [5] V. A. Titarev and E. F. Toro. ADER Schemes for Three-Dimensional Hyperbolic Systems. *J. Comput. Phys.*, 204:715–736, 2005.
- [6] E.F. Toro and V.A. Titarev. ADER Schemes for Scalar Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms in Three Space Dimensions. *J. Comput. Phys.*, 202(1):196–215, 2005.
- [7] M. Kaeser and A. Iske. Adaptive ADER Schemes for the Solution of Scalar Non-Linear Hyperbolic Problems. *J. Comput. Phys.*, --, 2005.

- [8] M. Dumbser, D. Balsara, E. F. Toro, and C. D. Munz. A Unified Framework for the Construction of One-Step Finite-Volume and Discontinuous Galerkin Schemes. *J. Comput. Phys.*, 227:8209–8253, 2008.
- [9] M. Dumbser, C. Enaux, and E. F. Toro. Finite Volume Schemes of Very High Order of Accuracy for Stiff Hyperbolic Balance Laws. *J. Comput. Phys.*, 227(8):3971–4001, 2008.
- [10] M. Dumbser, M. Kaeser, V.A. Titarev, and E.F. Toro. Quadrature-Free Non-Oscillatory Finite Volume Schemes on Unstructured Meshes for Nonlinear Hyperbolic Systems. *J. Comput. Phys.*, 226(8):204–243, 2007.
- [11] M. Dumbser, M. Kaeser, and E.F. Toro. An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes V: Local Time Stepping and p-Adaptivity. *Geophysical Journal International*, 171:695–717, 2007.
- [12] C.E. Castro and E.F. Toro. Solvers for the High-Order Riemann Problem for Hyperbolic Balance Laws. *J. Comput. Phys.*, 227:2481–2513, 2008.
- [13] G.I. Montecinos, C.E. Castro, M. Dumbser and E.F. Toro. Comparison of solvers for the generalized Riemann problem for hyperbolic systems with source terms. *Journal of Computational Physics*. Vol. 231, pp 6472-6494, 2012.
- [14] M.R. Norman and H. Finkel. Multi-Moment ADER-Taylor Methods for Systems of Conservation Laws with Source Terms in One Dimension. *Journal of Computational Physics*. Volume 231, 2012, Pages 6622-6642.
- [15] Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. 3rd Edition. Springer, Dordrecht, Heidelberg, London and New York, 2009.

HIGH ORDER NUMERICAL SIMULATION OF THE TRANSMISSION AND SCATTERING OF WAVES USING THE METHOD OF DIFFERENCE POTENTIALS

D.S. Britt¹, M. Medvinsky², E. Turkel², **С.В. Цынков**^{1,3}

¹*North Carolina State University, Raleigh, NC, USA,
dsbritt@ncsu.edu, stsynkov@ncsu.edu*

²*Tel Aviv University, Israel,
medvinsk@post.tau.ac.il, turkel@post.tau.ac.il*

³*Московский Физико-Технический Институт, Долгопрудный 141700, Россия*

Метод разностных потенциалов, предложенный Рябен'ким, применён совместно с компактными разностными схемами высокого порядка точности для решения задач распространения волн в областях с переменными и, возможно, разрывными характеристиками среды.

The method of difference potentials by Ryaben'kii is combined with compact high order accurate finite difference schemes for solving the problems of propagation of waves across the regions with variable and/or discontinuous material characteristics.

We present a high order accurate methodology for the numerical simulation of time-harmonic waves governed by the variable coefficient Helmholtz equation. Our approach combines the method of difference potentials developed by Ryaben'kii [1] with compact finite difference schemes that provide an inexpensive venue toward high order accuracy [2,3]. The method of difference potentials can be interpreted as a generalized discrete version of the method of Calderon's operators in the theory of partial differential equations.

The method of difference potentials [1] offers several key advantages, such as the capability of handling boundaries/interfaces that are not aligned with the discretization grid, variable coefficients, and nonstandard boundary conditions. In doing so, the complexity of the algorithm remains comparable to that of a conventional finite difference scheme on a regular structured grid. In addition to that, compact schemes [2,3] enable high order accuracy on narrow stencils and hence require only as many boundary conditions as needed for the underlying differential equation itself.

We have applied the proposed methodology to solving several variable coefficient interior Helmholtz problems with fourth and sixth order accuracy [4]. We have also analyzed the exterior scattering of time-harmonic waves about smooth shapes, as well as a number of transmission/scattering problems [5], in which not only do the waves scatter off a given shape but also propagate through the interface and travel across the heterogeneous medium inside. In all the cases, our methodology guarantees high order accuracy for variable coefficients, regular grids, and non-conforming boundaries and interfaces [4,5].

In addition to that, we have solved several problems with non-standard boundary conditions, such as variable coefficient Robin and mixed Dirichlet/Neumann boundary conditions [6]. A significant advantage of our approach is that it introduces a universal framework for treating the boundary conditions of any type, and that altering the boundary condition requires only minor changes to the overall algorithm.

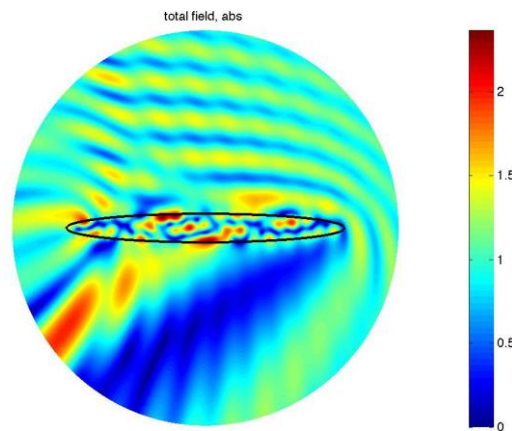


Figure 1. Scattering of a plane wave about an ellipse with aspect ratio 10. Absolute value of the total field is shown. The exterior wavenumber is 10 and the interior wavenumber is 20.

Work supported by the US National Science Foundation, grant DMS-0810963, US Army Research Office, grant W911NF-11-1-0384, and US-Israel Binational Science Foundation, grant 2008094.

Bibliography:

- [1] В.С. Рябенский, Метод разностных потенциалов и его приложения, 2-е издание, Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2002, 496 с.
- [2] S. Britt, S. Tsynkov, and E. Turkel, A Compact Fourth Order Scheme for the Helmholtz Equation in Polar Coordinates, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 45, Nos. 1-3 (2010) pp. 26-47.
- [3] S. Britt, S. Tsynkov, and E. Turkel, Numerical Simulation of Time-Harmonic Waves in Inhomogeneous Media using Compact High Order Schemes, *Communications in Computational Physics*, Vol. 9, No. 3 (2011) pp. 520-541.
- [4] M. Medvinsky, S. Tsynkov, and E. Turkel. The Method of Difference Potentials for the Helmholtz Equation Using Compact High Order Schemes, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 53 (2012) pp. 150-193.
- [5] M. Medvinsky, S. Tsynkov, and E. Turkel. High Order Numerical Simulation of the Transmission and Scattering of Waves Using the Method of Difference Potentials, *Journal of Computational Physics*, Vol. 243 (2013) pp. 305-322.
- [6] S. Britt, S. Tsynkov, and E. Turkel. A High Order Numerical Method for the Helmholtz Equation with Non-Standard Boundary Conditions, *SIAM Journal on Scientific Computing*, submitted for publication.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

А.А. Абрамов¹, Л.Ф. Юхно²

¹*Вычислительный Центр РАН,
alalabr@ccas.ru*

²*Институт прикладной математики РАН,
yukhno@itamod.ru*

Предлагается численный метод решения уравнений Пенлеве I-VI. Трудность этой задачи в том, что решения могут иметь подвижные полюса, а уравнения имеют особенность в точках, где решения принимают некоторые значения. Метод основан на переходе к эквивалентным системам дифференциальных уравнений без особенностей в указанных точках и их окрестностях.

A numerical method for solving the I-VI Painleve equations is proposed. The difficulty of this problem is that the unknown functions can have the movable poles, and the equations have singularities at the points where the solutions take some values. The method is based on the transition to auxiliary systems of differential equations having no singularities at the indicating points and their neighborhoods.

Трансценденты Пенлеве играют важную роль в нелинейной математической физике, как, например, функции Бесселя в линейных физических задачах ([1]). В работе рассматривается численный метод решения задачи Коши для всех уравнений Пенлеве I-VI. Трудность состоит в том, что решения могут иметь подвижные особые точки типа полюса, а сами уравнения имеют особенность в точках, где решения принимают некоторые значения (все такие точки названы критическими). Всего для 6 уравнений имеется 23 вида критических точек. Положение критических точек зависит от решения и заранее неизвестно. В процессе решения требуется обнаружить критическую точку, численно найти ее положение, пройти через нее и получить удобное представление решения в ее окрестности. Предлагаемый метод, названный нами *методом последовательного исключения особенности*, позволяет решить эту задачу корректного прохождения через критическую точку. Основа метода состоит в переходе к эквивалентной дифференциальной системе, уравнения и решения которой не имеют особенностей в соответствующей критической точке и ее окрестности.

Идею получения вспомогательных уравнений изложим на примере полюса 2-го порядка. Для исходной функции $y(x)$ в окрестности полюса x_* вводятся функции $u(x) = y(x)/y'(x)$ и $v(x) = (y'(x))^2 / y^3(x)$. Для них имеет место: $u(x_*) = 0, u'(x_*) \neq 0, v_* = v(x_*) \neq 0$. Исходное уравнение приводится к системе $u' = g(x, u, v), uv' = h(x, u, v)$, где правые части – аналитические функции в окрестности точки $(x_*, 0, v_*)$. Если $h(x, 0, v) \equiv 0$, то второе уравнение имеет вид $v' = \tilde{h}(x, u, v)$ и система особенностей не имеет. Если это не так, то из соотношения $h(x, 0, v) = 0$ находится $v = v_*(x)$, где $v_*(x)$ аналитическая функция. В силу приведенных соотношений в окрестности x_* имеет место представление $v(x) = v_*(x) + u(x)z_1(x)$, $z_1(x)$ аналитическая. Для функций $u(x), z_1(x)$ получается система $u' = g_1(x, u, z_1), uz_1' = h_1(x, u, z_1)$, подобная предыдущей, и для нее процесс преобразования повторяется. Оказывается, для всех уравнений Пенлеве и всех типов критических точек эквивалентные системы уравнений без особенностей (всего 23 вида) получаются за конечное число (максимум 6) таких шагов (см. [2-7]). Кроме того, из полученных уравнений следуют эффективные критерии перехода к вспомогательным системам и обратно. В результате, численный метод представляет собой своеобразную «схему сквозного счета», позволяя проходить через любые критические точки. Положение этих точек, в силу условий $u(x_*) \neq 0, u'(x_*) \neq 0$, находится численно устойчиво. Эффективность метода подтверждена многочисленными расчетами (см. графики в [2-7]).

Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-00219).

Список литературы:

1. Итс А.Р., Капаев А.А. и др. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2005. 728 с.

2. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2012. Т. 52. № 3. С.379-387.
3. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 7. С.925-934.
4. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2012. Т.52. №11. С.2023-2032.
5. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2013. Т. 53. № 1. С.58-71.
6. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2013. Т. 53. № 2. С.249-262.
7. Абрамов А.А., Юхно Л.Ф. // Ж. выч. мат. и мат. физ. 2013. Т. 53. № 5. С. 000-000.

A.A. Abramov¹, L.F. Yukhno²

“On a numerical solution of the Painleve equations”

¹*Dorodnicyn Computing Center, Russian Academy of Sciences, alalabr@ccas.ru*

²*Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, yukhno@imamod.ru*

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ МАТРИЧНОЙ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С БЛОЧНО-ПЯТИДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Е.Н. Акимова

*Институт математики и механики УрО РАН – Екатеринбург, Россия,
aen15@yandex.ru*

Построен параллельный алгоритм матричной прогонки для решения систем уравнений с блочно-пятидиагональными матрицами коэффициентов. Доказана теорема о выполнении принципа суперпозиции для искомых неизвестных при решении задачи в подобластях, на которые разбивается исходная область.

To solve linear systems of equations with block-fivediagonal matrices, a direct parallel matrix sweep algorithm is constructed. For the problem in subdomains into which the initial domain is partitioned, the theorem about the superposition principle for required unknown vectors is proved.

В работе [1] предложен и обоснован параллельный алгоритм матричной прогонки для решения систем уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами коэффициентов. В данной работе построен параллельный алгоритм матричной прогонки для решения систем уравнений с блочно-пятидиагональными матрицами коэффициентов. Такие системы возникают при конечно-разностной аппроксимации трехмерных краевых задач, в частности, при решении трехмерной задачи электроразведки (бокового каротажного зондирования).

Рассмотрим систему векторных уравнений

$$\begin{cases} C_0 \bar{Y}_0 - D_0 \bar{Y}_1 + E_0 \bar{Y}_2 = \bar{F}_0, \\ -B_1 \bar{Y}_0 + C_1 \bar{Y}_1 - D_1 \bar{Y}_2 + E_1 \bar{Y}_3 = \bar{F}_1, \\ A_i \bar{Y}_{i-2} - B_i \bar{Y}_{i-1} + C_i \bar{Y}_i - D_i \bar{Y}_{i+1} + E_i \bar{Y}_{i+2} = \bar{F}_i, \quad i = 2, \dots, N-1; \\ A_N \bar{Y}_{N-2} - B_N \bar{Y}_{N-1} + C_N \bar{Y}_N - D_N \bar{Y}_{N+1} = \bar{F}_N, \\ A_{N+1} \bar{Y}_{N-1} - B_{N+1} \bar{Y}_N + C_{N+1} \bar{Y}_{N+1} = \bar{F}_{N+1}, \end{cases} \quad (1)$$

где \bar{Y}_i – искомые векторы размерности n , \bar{F}_i – заданные векторы размерности n , A_i, B_i, C_i, D_i, E_i квадратные матрицы порядка n .

Будем предполагать, что исходная область P , где рассматривается краевая задача, представляет собой прямоугольник. При построении параллельного алгоритма исходную область P разобьем на L пересекающихся подобластей, определяемых интервалами $(K, K+M)$ и $(K+1, K+M+1)$, $K=0, M, \dots, N-M$, вертикальными линиями так, что $N+1=L \cdot M+1$ (рис.1).

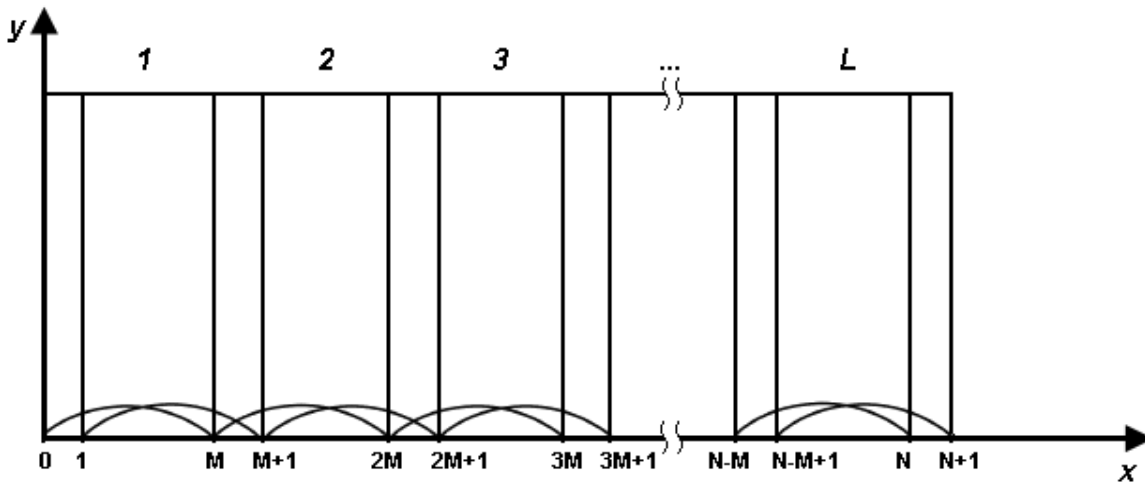


Рис. 1. Разбиение исходной области P на L подобластей

В качестве параметрических неизвестных выберем неизвестные векторы на границах подобластей \bar{Y}_K, \bar{Y}_{K+1} , $K=0, M, \dots$, связывающие неизвестные на сетке по вертикали. Относительно параметрических неизвестных \bar{Y}_K, \bar{Y}_{K+1} строится редуцированная система уравнений (РСЦ), имеющая меньшую размерность по сравнению с исходной. РСЦ представляет собой систему векторных уравнений с блочно-семидиагональной матрицей коэффициентов, в каждой строке которой один из семи элементов, находящийся либо слева, либо справа от главной диагонали, является нулевым.

РСЦ может быть решена методом матричной прогонки для решения систем уравнений с блочно-семидиагональными матрицами. Формулы метода выводятся аналогично формулам метода матричной прогонки для решения систем уравнений с блочно-трехдиагональными матрицами [2].

Доказано, что для искомых неизвестных в L подобластях выполняется принцип суперпозиции. После нахождения векторов-параметров по принципу

суперпозиции остальные искомые неизвестные выражаются через параметрические и находятся в каждой подобласти L независимо.

Параллельный алгоритм матричной прогонки для решения систем уравнений с блочно-пятидиагональными матрицами может быть эффективно реализован на многопроцессорных системах с распределенной памятью с числом процессоров L , равным числу подобластей, а также на многоядерном процессоре и графических процессорах (видеокартах).

Работа выполнена при поддержке УрО РАН по программе Президиума РАН (проект 12-П-01-1023) и при поддержке РФФИ (проект 12-01-00106-а).

Список литературы:

1. Акимов Е.Н. Распараллеливание алгоритма матричной прогонки // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 9. С. 61-67.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

С. Д. Алгазин

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского, Москва, Россия,
algazinsd@mail.ru*

Рассматриваются задачи о свободных колебаниях прямоугольной неоднородной мембраны, мембраны L-образной формы, мембраны, контур которой получается конформным отображением квадрата. Для названных задач построены численные алгоритмы без насыщения. Проводится сравнение с результатами, опубликованными в литературе.

Problems about the free oscillations of a rectangular no uniform membrane, a membrane of the L-shaped shape, a membrane which contours is gained by a quadrate conformal representation are considered. For the termed problems numerical algorithms without saturation are constructed. Comparison with the effects published in the literature is spent.

Введение. В [1] описана методика численного решения задачи на собственные значения для оператора Лапласа. Эти результаты основаны на идеях К. И. Бабенко [2]. Первую публикацию автора на эту тему см. в [3]. Программы опубликованы в [4]. Несмотря на эти публикации на западе регулярно появляются статьи о вычислении собственных чисел оператора Лапласа (свободные колебания мембраны). Настоящая работа посвящена анализу этих публикаций и сравнению с результатами автора.

1. Двумерное уравнение Лапласа в прямоугольнике.

Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \lambda \rho u = 0, \quad u = u(x, y), \quad \rho = \rho(x, y) \geq 0; (x, y) \in \Gamma\{[0, a] \times [0, b]\},$$

$$u|_{\partial\Gamma} = 0. \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda \rho(x, y) u = 0, \quad u = u(x, y).$$

Дискретизация краевой задачи (1.1) описана в [1]. В результате получаем дискретную задачу в виде:

$$(D_2 \otimes I_m + I_n \otimes D_1) \tilde{u} = \tilde{\lambda} R \tilde{u}, \quad \text{где } m - \text{число узлов дискретизации по } x, \quad n - \text{число}$$

узлов дискретизации по у. D_1 – матрица дискретного оператора : $-\frac{d^2 u}{dx^2}$

размера $m \times m$; D_2 – матрица дискретного оператора : $-\frac{d^2 u}{dy^2}$ размера $n \times n$; \tilde{u} –

вектор длины $N = m \cdot n$, содержащий приближённые значения собственной функции $u = u(x, y)$ в узлах сетки, $\tilde{\lambda}$ – приближённое собственное значение, R – диагональная матрица, содержащая на диагонали значения функции $\rho = \rho(x, y)$ в узлах сетки. По x и y выбирается сетка по нулям многочлена Чебышева, \otimes – знак кронекеровского произведения матриц; I_m , I_n – единичные матрицы размера $m \times m$ и $n \times n$ соответственно. Матрицы D_1 и D_2 – строятся программой для решения одномерной задачи Штурма-Лиувилля [1].

При $\rho \equiv 1$, собственные значения краевой задачи (1.1) известны в аналитическом виде:

$$\lambda^2 = \pi^2 \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right), \quad r, s = 1, 2, 3, \dots$$

Результаты расчётов приведены в [5].

Список литературы:

1. Алгазин С. Д. Численные алгоритмы классической математической физики. – М.: Диалог-МИФИ, 2010. – 240 с.
2. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.; Издание второе, исправленное и дополненное, под редакцией А. Д. Брюно. Москва-Ижевск, РХД, 2002. 847 с.
3. Алгазин С. Д., Бабенко К. И., Косоруков А. Л. О численном решении задачи на собственные значения. М., 1975. 57 с. (Препр. ИПМ; № 108).
4. Вычисление собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа (Lap123) // СВИДЕТЕЛЬСТВО о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012617739. Автор Алгазин Сергей Дмитриевич (RU). Зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 27 августа 2012 г., 18 с.
5. Алгазин С. Д.. Численные алгоритмы классической матфизики. XL. Численное исследование свободных колебаний мембраны. М., 2013. 48 с. (Препр. ИПМех; № 1041).

БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Е.Н. Аристова¹, С.В. Мартыненко², Б.В. Рогов³

¹*ИПМ им. М.В.Келдыша, МФТИ,
aristovaen@mail.ru*

²*МФТИ,
martinenko_sv@mail.ru*

³*ИПМ им. М.В.Келдыша, МФТИ,
rogov@post.ru*

В работе представлено развитие бикомпактных схем, предложенных ранее для систем уравнений в частных производных гиперболического типа, для решения уравнения переноса излучения или частиц. Схема обладает четвертым порядком аппроксимации по пространству и третьим по времени. Рассмотрены способы аппроксимации стационарных задач.

Development of bcompact schemes, which earlier have been suggested for solving hyperbolic systems of equation in partial derivatives, for solving particle or radiation transport equation has been done. The scheme has fourth order of approximation in space variables and third in time. The different approaches to solving stable equations have been investigated.

Линейное неоднородное уравнение переноса описывает перенос неполяризованного излучения или нейтронов в среде [1]. Консервативность разностной схемы в этом случае является важным свойством, отражающим физический закон сохранения на разностном уровне. Не менее важно использовать аппроксимацию на минимальном шаблоне из-за присутствия контактных разрывов, весьма характерных для задач переноса излучения или частиц. В консервативно-характеристических методах обычно компактная аппроксимация строится с использованием потоков по граням расчетной ячейки [2]. Некорректное перераспределение по граням выходящих потоков приводит к значительным ошибкам в задачах с гетерогенными средами или сосредоточенными источниками [3].

Семейство компактных схем для решения линейного уравнения переноса, построенных на основе метода прямых и интегро-интерполяционного метода, было предложено в [4]. Эти схемы используют расширение списка искомых величин, включая наряду с узловыми значениями интегральные средние по сеточной ячейке или значения в полущелых узлах в случае одной пространственной переменной. Развитие метода для многомерных геометрий и систем гиперболических уравнений представлено в [5-6]. Эти схемы обладают четвертым порядком аппроксимации по пространственным переменным и третьим по времени. Они абсолютно устойчивы, монотонны, реализуются методом бегущего счета.

В данной работе представлено применение этих схем для неоднородного уравнения переноса. При построении бикомпактных схемы для нестационарного уравнения переноса в случае одной и двух пространственных переменных также используется расширенный список искомых величин. Предложена факторизованная схема для решения уравнения переноса в двумерной плоской геометрии, в которой список искомых функций увеличен до четырех. Для интегрирования по времени используются схемы из семейства диагонально- неявных методов Рунге-Кутты третьего порядка аппроксимации, а также схемы Розенброка с комплексными коэффициентами CROS. Рассмотрены различные варианты схемы для стационарного неоднородного уравнения переноса. В задачах с постоянным коэффициентом поглощения эффективный порядок сходимости на гладких решениях совпадает с теоретическим и равен трем. Предложен регуляризатор решения на основе использования схемы CROS для задач с существенным поглощением.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220 "О мерах по привлечению ведущих учёных в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования" по договору № 11.G34.31.0072, заключенного между Министерством образования и науки РФ, ведущим учёным и Московским физико-техническим институтом (государственным университетом), а также гранта РФФИ № 11-01-00389а.

Список литературы:

1. Четверушкин Б.Н.. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304с.
2. Baydin D.F., Aristova E.N., Gol'din V.Ya. // TTSP. 2008. v.37. №02-04. P. 286-306.
3. Николаева О.В. // ЖВМ и МФ. 2004. Т. 44. № 5. С. 883-903.
4. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. // ДАН. 2011. Т.436, №5. С.600-605.
5. Михайловская М.Н., Рогов Б.В. // ММ. 2011, т.23, №10, с.107-116.
6. Михайловская М.Н., Рогов Б.В. // ЖВМ и МФ. 2012. Т.52. №4. С.672-695.

E.N. Aristova¹, S.V. Martynenko², B.V. Rogov³

«Bicompact schemes for solving inhomogeneous linear transport equation»

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia, aristova@mail.ru*

²*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow Region, Dolgoprudny, Russia, martinenko_sv@mail.ru*

³*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia, rogov@post.ru*

СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОПЕРАТОРАМИ МОНОТОННОГО ТИПА

И.Б. Бадриев¹

¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ildar.badriev@ksu.ru

Рассматриваются смешанное вариационное неравенство с оператором монотонного типа в банаховых и гильбертовых пространствах. Для их решения предложены сеточные методы, основанные на конечномерных аппроксимациях вариационных неравенств. Для решения сеточных вариационных неравенств построены итерационные методы и исследована их сходимость.

Mixed variational inequalities with monotone-type operators in Banach and Hilbert spaces are considered. To solve these variational inequalities mesh methods based on finite dimensional approximation are suggested. For solving the mesh variational inequalities iterative methods are developed and their convergence is investigated.

Пусть V – банахово пространство с равномерно выпуклым сопряженным V^* , M – выпуклое замкнутое множество в V , f – заданный элемент из V^* , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – отношение двойственности между V и V^* . Рассматривается задача поиска элемента $u \in M$, являющегося решением смешанного вариационного неравенства

$$\langle Au - f, \eta - u \rangle + F(\eta) - F(u) \geq 0 \quad \forall \eta \in M, \quad (1)$$

где $A: V \rightarrow V^*$ – коэрцитивный оператор монотонного типа (псевдомонотонный [1], монотонный или сильно монотонный), $F: V \rightarrow \mathbb{R}^1$ – выпуклый, собственный, непрерывный, вообще говоря, недифференцируемый функционал. Такие вариационные неравенства возникают, например, при математическом описании процессов подземной фильтрации несжимаемой жидкости [2], при решении задач об определении границ предельно-равновесных целиков остаточной вязко-пластической нефти [3], при решении задач об определении положения равновесия мягких сетчатых оболочек [4] и т.д. При указанных выше ограничениях на оператор A и функционал F задача (1) имеет по крайней мере одно решение [1].

Пусть $\{V_h\}_{h>0}$ – некоторое семейство пространств, где параметр h стремится к нулю, такое, что $V_h \subset V$. Пусть заданы линейные операторы $r_h: V \rightarrow V_h$ (операторы сужения из V на V_h). При этом предполагаем, что семейство $\{V_h\}_h$ аппроксимирует V , т.е. $\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h \eta - \eta\|_V = 0$ для любого $\eta \in V$. Для каждого h рассмотрим выпуклое замкнутое множество $M_h \subset V_h$, аппроксимирующее M , т.е., во-первых, для любого $\eta \in M$ можно найти элемент $\eta_h \in M_h$ такой что, $\lim_{h \rightarrow 0} \|\eta_h - \eta\|_V = 0$, и во-вторых, если $\eta_h \in M_h$, η_h сходится к η слабо в V при $h \rightarrow 0$, то $\eta \in M$. Задаче (1) поставим в

соответствие семейство аппроксимирующих задач поиска элементов $u_h \in M_h$ таких, что

$$\langle Au_h - f, \eta_h - u_h \rangle + F(\eta_h) - F(u_h) \geq 0 \quad \forall \eta_h \in M_h. \quad (2)$$

Теорема 1. Задача (2) имеет непустое, выпуклое и замкнутое множество решений, множество $\{u_h\}_{h>0}$ решений задачи (2) равномерно ограничено по h : $\|u_h\|_V \leq c$, где константа $c > 0$ не зависит от h . Если подпоследовательность $\{u_{h_i}\}_{i=1}^\infty$ слабо сходится к u^* в V при $h_i \rightarrow 0$, то u^* – решение задачи (1).

Для решения задачи (2) можно использовать предложенный в [5] итерационный метод, каждый шаг которого сводится к решению вариационного неравенства с оператором двойственности.

Работа поддержана РФФИ (гранты № 11-01-00667-а, 12-01-00955-а, 12-01-97022-р_поволжье_а).

Список литературы:

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
2. Лапин А.В. Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19, № 3. – С. 689–700.
3. Ентов В.М., Панков В.Н., Панько С.В. Математическая теория целиков остаточной вязкопластичной нефти. – Томск: Изд-во Томского государственного университета. – 1989. – 196 с.
4. Задворнов О.А. Постановка и исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием // Известия ВУЗов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 45–52.
5. Badriev I.B., Zadvornov O.A., Ismagilov L.N. On the methods of iterative regularization for the variational inequalities of the second kind // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2003. – Is. 3, № 2. – P.223-234.

I.B.Badriev

Mesh methods for mixed variational inequalities with monotone-type operators

¹Kazan Federal University, Kazan, Russia, ildar.badriev@ksu.ru

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.К. Баззаев¹, М.Х. Шхануков-Лафишев²

¹Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова –
Владикавказ, Россия,
alexander.bazzaev@gmail.com

²Кабардино-Балкарский государственный университет им.Х.М.Бербекова –
Нальчик, Россия,
lafishev@yandex.ru

Рассмотрены локально-одномерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода. Доказаны устойчивость и сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи.

For a fractional diffusion equation with Robin boundary conditions, locally one-dimensional difference schemes are considered and their stability and convergence are proved.

В цилиндре $Q_T = G \times (0, T]$, основанием которого служит p – мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\beta < \ell_\beta, \beta = \overline{1, p} \text{ с границей } \Gamma,$ рассмотрим задачу:

$$\partial_{0t}^\alpha u = Lu + f(x, t), (x, t) \in Q_T, (1)$$

$$k_\beta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} = \kappa_{-\beta} u - \mu_{-\beta}(x, t), x_\beta = 0, (2)$$

$$-k_\beta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} = \kappa_{+\beta} u - \mu_{+\beta}(x, t), x_\beta = \ell_\beta, (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \overline{G}, (4)$$

$$Lu = \sum_{\beta=1}^p L_\beta u, L_\beta u = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(k_\beta(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right),$$

$$0 < c_0 \leq k_\beta(x, t) \leq c_1, q_\beta \geq q_* > 0, \kappa_{\pm\beta} \geq 0, \kappa_{+\beta} + \kappa_{-\beta} \neq 0,$$

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(x, \eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ - регуляризованная дробная}$$

производная Римана-Лиувилля порядка α , $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Разностный аналог задачи (1) – (4) имеет вид:

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+\beta} \left(t_{j+\frac{\beta-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{\beta-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_t^p = \bar{\Lambda}_\beta y^{j+\frac{\beta}{p}} + \Phi_\beta^{j+\frac{\beta}{p}}, \quad x \in \omega_h, \beta = \overline{1, p}, \quad (5)$$

$$\bar{\Lambda}_\beta y = \begin{cases} (a_\beta y_{\bar{x}_\beta})_{x_\beta}, x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ 1/0.5h_\beta (a_\beta^{(1_\beta)} y_{x_\beta,0} - \bar{\kappa}_{-\beta} y_0), x_\beta = 0, \\ -1/0.5h_\beta (a_\beta^{(N_\beta)} y_{\bar{x}_\beta, N_\beta} + \bar{\kappa}_{+\beta} y_{N_\beta}), x_\beta = \ell_\beta, \end{cases} \quad \Phi_\beta = \begin{cases} \phi_\beta, x_\beta \in \omega_{h_\beta}, \\ \bar{\mu}_{-\beta} / 0.5h_\beta, x_\beta = 0, \\ \bar{\mu}_{+\beta} / 0.5h_\beta, x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_{-\beta} = \mu_{-\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,0}, \bar{\mu}_{+\beta} = \mu_{+\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

Для решения разностной задачи (5) с помощью принципа максимума [1] получена априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|u_0\|_C + \frac{1}{\kappa_*} \max_{0 < t' \leq j\tau} \|\bar{\mu}_{-\beta}(x, t') + \bar{\mu}_{+\beta}(x, t')\|_C +$$

$$+ p^{1-\alpha} \Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^j \tau^\alpha \sum_{\beta=1}^p \max_{0 \leq s \leq \beta} \|\phi^{j'+\frac{s}{p}}\|_C,$$

откуда следует равномерная сходимость разностной схемы при $1/2 < \alpha \leq 1$.

Список литературы:

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

A.K. Bazzaev¹, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev².

«Locally one-dimensional scheme for fractional diffusion equations with robin boundary conditions»

¹North Ossetian State University, Vladikavkaz, Russia,
alexander.bazzaev@gmail.com

²Kabardino-Balkar State University, Nalchik, Russia, lafishev@yandex.ru

МОДЕЛЬ ПОРИСТОСТИ В ТОНКИХ СЛОЯХ

А.Л. Бондарева¹, Г.И. Змиевская¹

¹ИПМ им.М.В. Келдыша РАН – Москва,
bal310775@yandex.ru, zmig@mail.ru

Для прогноза радиационных повреждений в многослойных структурах разработан метод стохастического аналога решения кинетических уравнений Колмогорова-Феллера и Эйнштейна-Смолуховского, описывающих флуктуационную стадию фазового перехода 1-го рода, модель образования пористости важна при модификации свойств материалов.

The stochastic analog method for solutions of Kolmogorov–Feller and Einstein–Smoluchowski kinetic equations is used for prediction of radiation damage in multilayer structures. Kolmogorov–Feller and Einstein–Smoluchowski equations describe fluctuation

stage of first-order phase transition. The model of porosity formation is important for modification of materials properties.

Метод стохастического аналога основан на теоремах, согласно которым кинетические уравнения в частных производных параболического типа однозначно связаны со стохастическими дифференциальными уравнениями /СДУ/ Ито, а плотность переходной вероятности марковского случайного процесса (МП), являющегося решением СДУ Ито, интерпретируется как функция распределения /ФР/, входящая в соответствующее кинетическое уравнение [1]. Функционал-коэффициентами кинетических уравнений являются термодинамический потенциал Гиббса образования зародыша [3] фазового перехода, в том числе и для вакансионно-газовых пор в материале [4], а также диффузия в пространстве размеров зародышей и диффузия в кристаллических решетках слоев. Функционал-коэффициентами являются и потенциалы косвенного упругого взаимодействия зародышей в слоях. Взаимодействие зародышей происходит через возмущение акустических фононов решетки дефектами во всех слоях и фриделевских осцилляций плотности электронов в металле. Броуновское движение радиационных дефектов в слоях происходит под действием дальнедействующих сил. Решение систем СДУ модели осуществляется модифицированным на случай квазилинейности уравнений устойчивым численным методом [2] второго порядка точности с бесконечной областью устойчивости (согласно введенным определениям и теоремам [2]) на заданной сетке времени (без ограничения на величину шага по времени). На каждом шаге по времени решается задача с начальными условиями, которые пересчитываются в соответствии с функцией распределения зародышей дефектов по размерам и положению в слоях с предыдущего шага. Расчеты размеров островков новой фазы на поверхности кристаллической решетки [3], конденсации кластеров карбида кремния в плазме разряда [4] позволили найти ФР зародышей фазового перехода. Образование пор в материалах под воздействием радиационных потоков [4-7] представляет интерес и как процесс деградации свойств в технологических зеркалах и защитных покрытиях, объектах культурного наследия, так и как способ получения новых материалов [5,6]. Учет мгновенной упругой деформации кристаллической решетки (Si , SiC , Mo и др.) зародышами сферической формы за счет скачка давления на его границе производится по ФР дефектов в образце [6,7]. Изучение механизмов фазового перехода на неравновесной стадии важно в материаловедении ТЯР, электрореактивных двигателей космических аппаратов, а также в создании пористых полупроводниковых и диэлектрических материалов [8].

Работа частично поддержана программой ОМН РАН 3.5 и грантами РФФИ № 11-01-00282, № 12-01-00490).

Список литературы:

1. Змиевская Г.И. Модель флуктуационной стадии фазового перехода // в книге Энциклопедия низкотемпературной плазмы (Сер. Б). под ред.

- В.Е.Фортова. Т.VII, Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. Ред. Ю.П. Попов . Кн. 3.- М.: ЯНУС К. 2009. С. 98-120.
2. Artem'ev S.S., Averina T.A. Numerical analysis of systems of ordinary and stochastic differential equations. Utrecht, The Netherlands. 1997. P. 176.
 3. Бондарева А.Л., Змиевская Г.И. // Доклады Академии Наук. Москва. изд-во "Наука". 2005. Т. 401. № 4. С. 471-475.
 4. Змиевская Г.И., Бондарева А.Л.// Физика плазмы. 2011. Т.37. №1. С.93-102.
 5. Zmievskaya G.I., Bondareva A.L., Levchenko V.D., Levchenko T.V. // Journ. of Phys. D: Appl.Phys. 2007. V. 40 P. 4842–4849.
 6. Bondareva A.L., Levchenko T.V., Zmievskaya G.I. // Defect and Diffusion Forum. V. 297–301: Diffusion in Solids and Liquids V: Trans Tech Publications. Switzerland. 2010. P. 502-507.
 7. Змиевская Г.И., Бондарева А.Л. Численное моделирование кинетики возникновения пористости в многослойных средах // Сборник трудов ИПМ им. МВ Келдыша РАН Физические и математические модели плазмы и плазмоподобных сред. Под ред. Дж. Майно и Г. Змиевской. 2012. С. 16-30 ISBN 978-5-98354-009-5
 8. Diederik S. Wiersma. Nature Photonics. 2013. V. 7. P. 188–196

A.L. Bondareva¹, G.I. Zmievskaya¹

«Simulation of non-equilibrium process of initial stage of phase transition»

¹ *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, zmig@mail.ru*

ПОСТРОЕНИЕ ТОЛСТЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СЕТОЧНЫХ СЛОЕВ ОКОЛО ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

А.И. Белокрыс-Федотов¹, В.А. Гаранжа²,
Л.Н. Кудрявцева³, С.В. Утюжников⁴

¹*ВЦ РАН, МФТИ,
belokrys.fedotov@gmail.com*

²*ВЦ РАН, МФТИ,
garan@ccas.ru*

³*ВЦ РАН, МФТИ,
arnir@rambler.ru*

⁴*МФТИ, Университет Манчестера,
s.utyuzhnikov@manchester.ac.uk*

Методы теории упругости с конечными деформациями используются для построения толстого сеточного слоя вокруг тел сложной формы. Начальным приближением является тонкий сильно сжатый слой упругого материала. В результате упругой разгрузки слой многократно расширяется, затем используется вариационно-маршевый метод для построения ортогональной сетки внутри слоя.

Finite hyperelasticity methods are used to construct thick prismatic mesh layers around complex bodies. A thin compressed elastic layer is chosen as initial guess. Elastic springback leads to a controlled layer thickness enlargement. Then, the combination of a variational method and marching technique is used for construction of orthogonal mesh layers inside a wide elastic layer.

Предложен вариационный метод автоматического построения толстых сеточных слоев вокруг тел сложной формы. При этом форма и толщина слоя не должна зависеть от качества сетки на поверхности тела. Начальным приближением является тонкий сильно сжатый слой упругого материала толщиной в одну ячейку сетки. Вариационный метод [1], [2] используется для моделирования упругой разгрузки этого материала. В результате слой многократно расширяется.

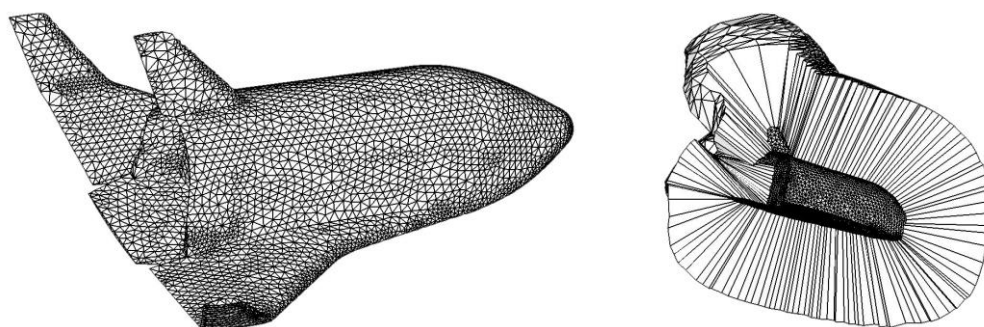


Рис.1.

На рис.1 показан пример тела сравнительно сложной формы - ВКА ЦАГИ, и показано сечение слоя, толщина которого превышает размер сечения тела. После этого используется алгоритм удаления самопересечений на внешней части слоя. Затем используется вариационно-маршевый метод для построения ортогональной сетки внутри слоя. Такая методика гарантирует невырожденность сеток независимо от толщины слоя.

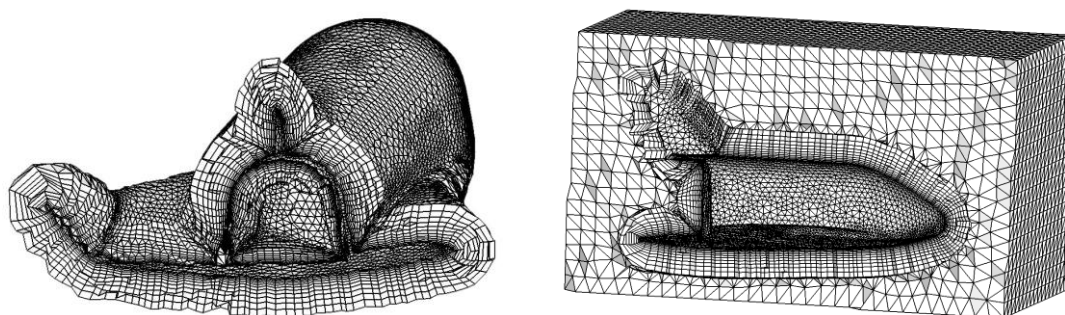


Рис.2.

При этом сетка с высокой точностью ортогональна к телу и удовлетворяет заданному закону сгущения. На рис.2, слева, показан призматический сеточный слой с ортогонализацией. На рис.2, справа, показаны предварительные результаты по интеграции построенного призматического слоя с тетраэдральной сеткой в ядре расчетной области. Тетраэдральная сетка строится с использованием методики [3]. Для улучшения

качества гибридной сетки необходим дополнительный этап оптимизации переходной области.

Работа поддержана грантом Правительства РФ по постановлению №220 по договору №11.G34.31.0072, грантом по программе П-15 Президиума РАН и грантом РФФИ 11-01-00786-а.

Список литературы:

1. Гаранжа В.А. // ЖВМиМФ 2000 Т.40 №11 С1685-1705.
2. Гаранжа В.А., Кудрявцева Л.Н. // ЖВМиМФ 2012 Т.52 №3 С499-520.
3. George P.L., Borouchaki H, Saltel E. // Int.J.Numer.Meth.Engng 2003 №58 С.1061-1089.

A.I. Belokrysov¹, **V.A. Garanzha**², L.N. Kudryavtseva³, S.V. Utyuzhnikov⁴
«Construction of thick prismatic mesh layers around complex bodies»

¹Computing center RAS, MIPT, Moscow, Russia, belokrysov@gmail.com

²Computing center RAS, MIPT, Moscow, Russia, garan@ccas

³Computing center RAS, MIPT, Moscow, Russia, arnir@rambler.ru

⁴Manchester University, Manchester, MIPT, Russia,
s.utyuzhnikov@manchester.ac.uk

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ

А. В. Гулин

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики*

Рассматривается краевая задача для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями, содержащими параметр $\gamma > 1$. Спектр пространственного дифференциального оператора содержит собственные значения в левой полуплоскости, что обуславливает неустойчивость задачи. Для аппроксимирующих разностных схем получен критерий устойчивости в подпространствах, порожденных устойчивыми гармониками.

The boundary value problem for the heat-conduction equation is considered with non-local boundary conditions containing the parameter $\gamma > 1$. The spectrum of the spatial differential operator has some eigenvalues in the left half-plane, that causes instability of the task. For the corresponding difference scheme the criterion is formulated of stability in subspaces generated by stable harmonics.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad u(0, t) = 0, \quad \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \quad (1)$$

где γ – заданный вещественный параметр. Разностные схемы для задачи (1) с $\gamma=1$ исследовал Н. И. Ионкин [1]. Подробный обзор работ, посвященных разностным методам решения задачи (1) с $\gamma \in [-1, 1]$, приведен в [2]. Принципиальное отличие от случая $\gamma = \pm 1$ состоит в том, что система собственных функций основного разностного оператора при $\gamma \neq \pm 1$ составляет базис в пространстве сеточных функций. Неустойчивые разностные схемы, для которых только одно собственное значение расположено в левой полуплоскости, рассматривались в [3]. В настоящем докладе рассматривается весь диапазон значений $\gamma > 1$. Доказан критерий устойчивости разностной схемы в подпространствах, порожденных устойчивыми гармониками. Аппроксимируем задачу (1) двухслойной разностной схемой, определяемой параметрами: N – число точек по пространству, $h=1/N$ и τ – шаги по пространству и времени, $\kappa = \tau / h^2$, σ – весовой множитель, $a = \text{ch}\left(h \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)\right)$.

Основной оператор A разностной схемы определяется как

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x},i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = 0,$$

$$(Ay)_N = \frac{2}{h}(y_{\bar{x},N} - \gamma y_{x,0}).$$

Собственные значения λ_k ($k=0, 1, \dots, N-1$) оператора A расположим в порядке возрастания действительной части. Считаем, что N кратно 4. Введем две системы чисел: $z_k = \{\sin^2(\pi kh)\}_{k=0}^{N/2}$ и $a_k = \{(1 - 2z_k)^{-1}\}_{k=0}^{N/4-1}$. Определим комплексное N - мерное пространство H , состоящее из функций $y_i = y(x_i)$, заданных на сетке $\{x_i = ih\}_{i=1}^N$. Наряду с H будем рассматривать подпространства $H_k(a)$, представляющие собой линейную оболочку собственных векторов $\{\mu^{(l)}(x_i)\}_{l=k}^{N-1}$, отвечающих собственным значениям λ_k оператора A . Число $k_0(N) \approx 0.37N^{2/3} + 0.83$, фигурирующее в теореме, является корнем некоторого трансцендентного уравнения.

Теорема 1. Пусть $a \in (a_{k-1}, a_k]$ для $k = 1, 2, \dots, N/4 - 1$. Разностная схема устойчива в подпространстве $H_k(a)$ тогда и только тогда, когда

$$(2\sigma - 1)\kappa + (1 + a)^{-1} \geq 0, \quad \text{если } k < [k_0(N)] \text{ и}$$

$$(2\sigma - 1)\kappa + [1 - a(1 - 2z_k)](a - 1 + 2z_k)^{-2} \geq 0, \quad \text{если } k \geq [k_0(N)].$$

Список литературы

1. Ионкин Н. И. Разностные схемы для одной неклассической задачи. Вестн. Моск. унив., сер. выч. матем. и киб., 1977, № 2, с. 20-32.
2. Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В.А. Разностные схемы для нестационарных нелокальных задач. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010.

3. Гулин А. В. Устойчивость нелокальных разностных схем в подпространстве. Дифференц. уравнения, 2012, Т. 48, № 7, с. 940-949.

Gulin A. V.

On stability of non-local difference schemes in subspaces.

M. V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of computational mathematics and cybernetics.

АППРОКСИМАЦИЯ ВТОРЫХ И СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ SBP ПОДХОДОМ НА ОСНОВЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПЕРВЫХ РАЗНОСТЕЙ

Л.Е. Довгилевич¹, И.Л. Софронов²

¹МФТИ (ГУ), МНЦ «Шлюмберже»,
ldovgilovich@slb.com

²МНЦ «Шлюмберже»,
isofronov@slb.com

Мы предлагаем обобщение SBP подхода путем введения несимметричных операторов в формуле сопряжения. В результате разработана последовательная аппроксимация старших производных конечными разностями первых производных на сдвинутых шаблонах. Преимущества построенных разностных схем продемонстрировано на задачах о распространении упругих волн.

We propose generalization of SBP approach by introducing asymmetric operators in the conjugation formula. As a result, a successive approximation of higher derivatives by finite differences of the first derivatives at the shifted stencils is developed. Advantages of proposed difference schemes are demonstrated on the problem of elastic waves propagation.

Мы рассматриваем задачу аппроксимации конечными разностями высокого порядка точности производных вида $(au_i)_j$, где $a(x)$, $u(x)$ – достаточно гладкие функции, $x = \{x_i\}$. Задача ставится в параллелепипеде на равномерной сетке, причем мы требуем, чтобы шаблон не выходил за пределы границ. Одно из решений этой задачи основано на применении SBP подхода см. 1 и 2, который позволяет получать семейства разностных схем, наследующих свойство самосопряженности исходного оператора при однородных граничных условиях Дирихле и/или Неймана. Это свойство является важным при построении устойчивых разностных методов решения эволюционных задач. Второе наше требование состоит в использовании последовательной аппроксимации для дискретизации операторов второго порядка. Это означает, что операторы старших производных получаются последовательным применением разностных операторов первой производной. Такой подход к

дискретизации дифференциальных операторов может быть выгоден при построении алгоритмов, экономных с точки зрения вычислительных ресурсов.

Непосредственное применение SBP подхода для проведения последовательной аппроксимации генерирует разностные схемы, которые допускают нефизичные решения типа «пила» для гиперболических задач (проблема чет-нечет). Поэтому, мы обобщили SBP подход, чтобы можно было получать разностные схемы, не поддерживающие пилообразные решения.

Введем равномерную сетку из N точек на отрезке $x \in [0,1]$ и рассмотрим на ней сеточные функции $\bar{u} = \{u_n\}$. Обозначим через $(\bar{u}, \bar{v})_H$ скалярное произведение в R^N с весом H , где H - некоторая диагональная матрица. Модифицированный SBP подход состоит в следующем. Вводим два сеточных оператора D^- и D^+ такие, что они аппроксимируют первую производную во всех точках сетки и удовлетворяют условию суммирования по частям (SBP) $\forall \bar{u}, \bar{v} \in R^N : (\bar{u}, D^+ \bar{v})_H + (D^- \bar{u}, \bar{v})_H = u_N v_N - u_1 v_1$. Если положить $D^- = D^+ = D$, то получим обычную SBP аппроксимацию на основе центрально-разностных операторов первой производной во внутренних точках сетки. Если же строить D^+ несимметричным образом, например на сдвинутом вперед шаблоне, то удастся подавлять пилу при сохранении остальных полезных свойств SBP подхода. В частности, нами получены конечно-разностные SBP аппроксимации производных с 8-ым порядком точности внутри отрезка и 4-ым в окрестности граничных точек.

В докладе представлена теория разработанного SBP подхода на несимметричных операторах в приложении к волновому уравнению, предложена разностная аппроксимация для уравнения анизотропной упругости 3, и приведены результаты численных расчетов.

Работа поддержана также РФФИ (грант № 13-01-00338)

Список литературы:

1. Mattsson, K. // Journal of Scientific Computing. 2012. V. 51. No. 3. P. 650–682.
2. Strand, B. // J. Computational Physics. 1994. V.110. P. 47–67.
3. Dovgilevich, L. // 75th EAGE Conference & Exhibition. 2013. Extended Abstracts.

L.E. Dovgilevich¹, I.L. Sofronov²

«SBP approximation of second and mixed derivatives based on asymmetric first differences»

¹MIPT (SU), Schlumberger Moscow research, ldovgilevich@slb.com

²Schlumberger Moscow research, isofronov@slb.com

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ПЛАЗМЕ

Г.В. Долголева

*ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва; Россия;
dolgg@kiam.ru*

Доклад посвящен моделированию одного из важнейших физических процессов при расчете плазмы термоядерных мишеней - переносу тепла. Рассматриваются различные приближения и их сравнение между собой.

The report focuses on the simulation of one of the most important physical processes in plasma fusion-heat transfer targets. Discusses the various approximations and compare them with each other.

При решении широкого круга задач, в частности, задач лазерной плазмы одним из определяющих процессов является перенос тепла. Для математического описания процессов переноса тепла чаще всего используют закон Фурье (диффузионное приближение). Это приближение ограничивается малыми температурными градиентами. С ростом градиента температуры поток неограниченно возрастает и превышает максимальный тепловой поток. Для крутых температурных фронтов, которые имеют место в облучаемых лазером мишенях, результаты могут быть получены путем численного решения кинетического уравнения Фокера-Планка. Но поскольку численно решать кинетическое уравнение – задача достаточно сложная и громоздкая, а учет процессов теплопереноса в высокотемпературной плазме необходим, то зачастую в расчетах используют приближение Фурье, модифицируя разумным образом величину потока. В результате появляются различные модели для описания процесса теплопереноса, уточняющие диффузионную модель. Простейшие и довольно распространенные модели - это модификация диффузионного потока либо ограничивая его максимально допустимым потоком /1/, либо учитывается нелокальный характер теплопереноса /2/. Люциани Г.Ф. и Мора Р. предложили для теплового потока формулу, которая учитывает нелокальный характер теплопереноса. Поток учитывает влияние всех точек системы на данную точку с помощью ядра, зависящего от оптических свойств системы.

В работе рассмотрено несколько приближений, сопоставляются результаты расчетов, анализируются положительные и отрицательные характеристики этих приближений, выбрано оптимальное приближение как с точки зрения точности, так и времени счета.

Работа поддержана РФФИ (грант № 11-01-00258)

Список литературы:

1. Волосевич П.П., Косырев В.И., Леванов Е.И. Об учете ограничения теплового потока в численном эксперименте // М.: Препринт ИПМ, №21, 1978, 22с.

2. Luciani J., Mora R., Virmont I. Nonlocal heat transport due to steep temperature gradients // Phys. Rev. Lett., 51, 1983, 1664-1667.

G.V. Dolgoleva

«Numerical simulation of heat transfer in a plasma»

Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences; Moscow; Russia; dolgg@kiam.ru

ЛОКАЛЬНЫЕ НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Л.В. Дородницын¹

¹*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
dorodn@cs.msu.su*

Обсуждается проблематика искусственных граничных условий при численном моделировании различных задач. Изложение иллюстрируется примерами из области газовой динамики.

We discuss the topic of artificial boundary conditions for numerical simulation of various problems. The presented material is illustrated with examples in the field of gas dynamics.

Около половины прикладных задач математической физики ставятся в неограниченных областях. Типичный пример — задача аэродинамического обтекания. В целях компьютерного моделирования требуется, как правило, использовать область конечного размера. Тем самым мы должны от *исходной задачи* перейти к *редуцированной задаче*. Затем в области вводится сетка и ставится *разностная задача*.

Наличие искусственных границ приводит к отражению волн внутрь области. Различные исследователи более полувека занимались проблемой задания соответствующих условий на таких границах, и более 30 лет существует понятие неотражающих граничных условий. В.С. Рябенский сформулировал в [1] концепцию точного переноса граничных условий с бесконечности на искусственную границу. В наших терминах можно сказать, что редуцированная задача должна иметь единственное решение, совпадающее с решением исходной задачи в пределах ограниченной подобласти. При построении неотражающего граничного условия следует иметь в виду, что решение разностной задачи неизбежно будет содержать погрешность ввиду дискретизации.

Неотражающие граничные условия для линейных задач математической физики представляют собой локальные уравнения (алгебраические или дифференциальные) либо нелокальные (интегральные, псевдо-

дифференциальные). Известно, что для многомерного волнового уравнения невозможно построить локальное неотражающее условие. Нелокальные граничные условия, как правило, громоздки, ресурсоёмки и трудно поддаются параллельной реализации. Приходится делать выбор между точными нелокальными и приближенными локальными неотражающими условиями.

Если граничное условие является приближенным, возникает проблема его устойчивости, т.е. корректности постановки начально-краевой редуцированной задачи с данным граничным условием. Автор приводит оригинальные примеры доказательства устойчивости граничного условия.

Разностная задача требует специальной постановки граничных условий: к ней не всегда применима простая дискретизация континуальных граничных уравнений. Данная проблематика относительно мало освещается в литературе. В этом контексте необходимо упомянуть метод разностных потенциалов В.С. Рябенского. В докладе рассматриваются две аппроксимации простейшего уравнения переноса, требующие большего количества граничных уравнений, чем дифференциальная модель: центрально-разностная схема на 3-точечном шаблоне и высокоточная схема на широком шаблоне, применяемая в вычислительной аэроакустике. Приводятся примеры дискретных краевых условий для этих схем из [2, 3].

Нелинейные задачи в редких случаях допускают точные неотражающие условия и не позволяют оценивать качество приближенных граничных условий. Тем не менее, для одномерных уравнений Эйлера и подобных гиперболических систем возможно выделить класс точных граничных условий [2]. Для нелинейных разностных граничных условий автором разработан математический инструмент, дающий возможность исследовать некоторые свойства алгоритмов: в частности, обнаружен эффект «неправильной асимптотики», подтверждаемый расчетами, и предложены способы его уменьшения.

Показаны примеры расчетов газодинамических задач с неотражающими граничными условиями: гауссов импульс в двумерных линеаризованных уравнениях Эйлера; вихревая дорожка позади квадратного цилиндра в вязком газе.

Список литературы:

1. Рябенский В.С. Точный перенос краевых условий // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып.1. С.129–145.
2. Дородницын Л.В. Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т.45. №7. С.1251–1278.
3. Dorodnicyn L.W. Artificial boundary conditions for high-accuracy aeroacoustic algorithms // SIAM J. Scientific Computing. 2010. V.32. No.4. P.1950–1979.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ В НЕГЛУБОКИХ ВОДОЕМАХ

Т.Г. Елизарова¹, О.В. Булатов²

¹Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН,
telizar@yahoo.com

²Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, dombulatov@mail.ru

В работе [1] авторами был предложен новый численный метод для расчета течений жидкости в приближении модели мелкой воды (МВ). В полном тексте будут обсуждаться особенности численного алгоритма, его тестирование, а также примеры решения разнообразных задач в приближении МВ.

In [1] a new numerical method to solve shallow water equations (SWE) was proposed. Numerical algorithm and results for 2D cases will be shown in the presentation.

Новый численный метод основан на использовании осреднения исходных уравнений по малому временному промежутку, что приводит к появлению в исходных уравнениях регуляризирующих добавок. Численные алгоритмы близкой структуры, основанные на использовании квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений, успешно применялись ранее к численному моделированию широкого круга течений газа и жидкости [2-4].

Регуляризованные уравнения МВ аппроксимируются с помощью интегро-интерполяционного метода с использованием центрально-разностных аппроксимаций для всех пространственных производных, включая конвективные слагаемые. Построенный алгоритм прост для программирования, эффективен для решения нестационарных задач, удобен для распараллеливания и реализации на неструктурированных сетках. В настоящее время этот алгоритм адаптирован для задач с подвижной границей затопленной зоны - так называемых задач с "сухим дном", а также для задач со сложной формой подстилающей поверхности.

Для простоты приведем одномерный вид регуляризованных уравнений МВ

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial j_m u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= \left(h - \tau \frac{\partial hu}{\partial x} \right) \cdot \left(f - g \frac{\partial b}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x} \\ j_m &= h(u - w), \quad w = \frac{\tau}{h} \left(\frac{\partial hu^2}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh \frac{\partial b}{\partial x} - hf \right) \\ \Pi &= uh\tau \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} - f \right) + \tau gh \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

В данной записи $h(x, t)$ и $u(x, t)$ обозначают глубину жидкости и ее скорость, $b(x)$ для профиля дна, f играет роль внешней силы (сила ветра, сила Кориолиса, сила трения о дно), g - ускорение свободного падения. Символом τ обозначен параметр регуляризации, который имеет размерность времени. В случае $\tau \rightarrow 0$ уравнения с добавочными членами превращаются в классические уравнения МВ. При численных расчетах на сетках с характерным шагом Δx параметр регуляризации вычисляется как $\tau = \alpha \Delta x / \sqrt{gh}$ с численным коэффициентом $0 < \alpha < 1$.

Для численного моделирования задач с "сухим дном" используется подход, связанный с ведением параметра отсечения ε для глубины жидкости h . В численном алгоритме ставится условие: если $h < \varepsilon$, тогда $u = 0$ и $\tau = 0$; иначе проводится стандартный расчет.

В полном тексте будут обсуждаться особенности численного алгоритма, его тестирование, а также примеры решения разнообразных задач в приближении МВ.

Список литературы:

1. Elizarova T.G., Bulatov O.V. // Regularized shallow water equations and a new method of numerical simulation of the open channel flows. Computers & Fluids. 2011. N 46. p. 206–211
2. Четверушкин Б.Н. // Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004
3. Елизарова Т.Г. // Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007
4. Шеретов Ю.В. // Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009

T.G. Elizarova¹, O.V. Bulatov²

«Regularized shallow water equations for modeling shallow water flows in channels»

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics RAN, Moscow, Russia, telizar@yahoo.com

²Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia, dombulatov@mail.ru

МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ РАЗНОСТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Рассмотрена проблема решения анизотропных разностных трехмерных эллиптических уравнений. Предложена эффективная параллельная реализация классического многосеточного метода Р.П. Федоренко на основе использования явных чебышевских итераций при решении грубосеточных уравнений и на этапах

сглаживания. Разработана процедура адаптации сглаживателей к анизотропии, и показана эффективность и масштабируемость параллельного кода.

We consider the problem of solution of anisotropic elliptic 3D difference equations and propose an efficient parallel implementation of the classical multigrid of R.P. Fedorenko. The algorithm is based on the explicit Chebyshev iterations for solving the coarsest grid equations and to construct smoothers. We develop the adaptive smoothers for anisotropy problems, and show that the multigrid provides efficiency and scalability.

Поиск параллельных алгоритмов актуален для 3D задач при наличии сильной коэффициентной или сеточной анизотропии. Современные требования к алгоритмам включают использование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого моделирования на сетках с числом узлов $N \simeq 10^{10}$. Претендентом на высокую масштабируемость является многосеточный метод при условии реализации его этапов на принципе алгоритмической простоты. Предложенный нами алгоритм представляет собой реализацию классического многосеточного метода Р.П. Федоренко на основе использования явных чебышевских итераций при решении грубосеточных уравнений и на этапах сглаживания.

Рассмотрим в качестве модели линейное эллиптическое уравнение в параллелепипеде с краевыми условиями I–III рода. Детали постановки задачи, дискретизации, и др. даны в [1, 2]. Уравнение с учетом краевых условий аппроксимируем простейшей 7-точечной разностной схемой на неравномерной декартовой сетке: $A_h u_h = f_h$, где A_h – самосопряженный неотрицательно-определенный оператор, спектр которого $[\lambda_{min}; \lambda_{max}]$ – отрезок неотрицательной полуоси. Итерирующий оператор многосеточного метода в двухсеточном представлении имеет вид: $Q = S_p(I - PA_H^{-1}RA_h)S_p$, где A_H – оператор редискретизации на грубой сетке, P, R, S_p – операторы интерполяции, проектирования и сглаживания соответственно.

Для многих задач характерна постановка вырожденной задачи Неймана, когда ищется решение с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Из условия разрешимости вырожденной задачи следует, что нужно обеспечить ортогональность невязки ядру дискретного оператора на каждом сеточном уровне. Традиционный способ соблюдения этого условия содержит глобальную операцию – расчет скалярного произведения, что снижает параллельную эффективность. Показано, что автоматическое обеспечение условия ортогональности выполняется при использовании оператора проектирования, сопряженного оператору интерполяции.

Сглаживание выполняет ключевую роль в многосеточном методе. В качестве сглаживателей мы изучаем две операторные функции от A_h – многочлен Чебышева и дробно-рациональную функцию, построенную на основе явно-итерационной схемы ЛИ-М [3]. Качество сглаживания зависит от задания границы λ_{min}^* , разделяющей спектра оператора на низкочастотную и высокочастотную части. В общем случае эта граница неизвестна. В качестве

примера, показывающего роль этой границы и свойства сглаживателей, на рис.1 приведены графики спектров чебышевского сглаживателя (*Cheb*), это многочлен Чебышева степени $p = 7$, и эквивалентного ему по вычислительным затратам сглаживателя ЛИ-М (*LIM*), построенного с помощью многочлена Чебышева степени $p = 4$. Граница раздела λ_{min}^* выбрана как $\lambda_{min}^* = \lambda_{max} / 40$ и число шагов сглаживания определено из условия уменьшения нормы невязки на высокочастотной части вчетверо и вдвое для сглаживателей *Cheb* и *LIM* соответственно. Хорошо видно качественное различие: чебышевский сглаживатель гасит высокочастотные компоненты невязки равномерно на участке $[\lambda_{min}^*, \lambda_{max}]$, а сглаживатель ЛИ-М старшие моды гасит сильнее.

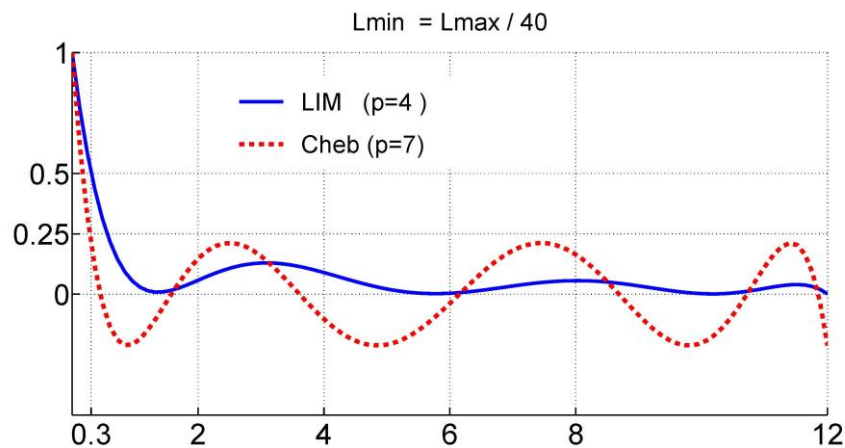


Рис.1 Сглаживатели: чебышевский ($p = 7$) и ЛИ-М ($p = 4$) при $\lambda_{min}^* = \lambda_{max} / 40$

Новой идеей является адаптация сглаживателей к анизотропии в ходе многосеточных итераций. Показано, что адаптация обеспечивает эффективность многосеточного метода и масштабируемость параллельного кода. Приведены результаты расчетов на суперкомпьютерах К-100 ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, «Ломоносов» МГУ им. М.В.Ломоносова, подтверждающие работоспособность алгоритма. Обобщение на 27-точечные дискретизации, а в части сглаживателей, и на другие схемы, представляется очевидным. Детальное численное исследование свойств построенного алгоритма дано в [1]–[2].

Список литературы

1. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Параллельный многосеточный метод для разностных эллиптических уравнений. Анизотропная диффузия // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 76. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-76>.
2. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Параллельный многосеточный метод для решения эллиптических уравнений // Матем. моделирование. 2013. Т.25. В печати.
3. Жуков В.Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. 2010. Т.22. № 10. С. 127-158.

V.T. Zhukov¹, N.D. Novikova², O.B. Feodoritova³

«Multigrid method for anisotropic elliptic difference equations»

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia,
vic.zhukov@gmail.com*

²*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia, nn@kiam.ru*

³*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia,
olga.feodoritova@gmail.com*

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ УПРОЩЕННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ИСКУССТВЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Н.А. Завьялова¹, С.В. Утюжников^{1,2}

¹*Московский физико-технический институт (государственный университет) –
Долгопрудный, Россия,*

natalia.zavyalova@gmail.com

²*The University of Manchester, UK,
S.Utyuzhnikov@manchester.ac.uk*

Предложен метод построения нелокальных граничных условий на искусственной границе. Основная идея состоит в построении оператора перехода от условий Дирихле на искусственной границе к условиям Неймана. Показана сходимость полученного решения к точному при удалении искусственной границы. Метод апробирован на примерах.

A method for constructing nonlocal boundary conditions on an artificial boundary is introduced. The main idea consists in constructing DtN-map. The convergence of obtained solution to the exact solution as the artificial boundary moves to infinity is showed. The method is tested on a number of examples.

Задачи, решаемые в бесконечном пространстве, возникают во многих областях физики: физика твердого тела, физика плазмы, аэро- и гидродинамика, электродинамика и многие другие. При численном моделировании, как правило, могут использоваться только ограниченные области. Поэтому возникает проблема корректной постановки граничных условий на искусственной границе [1, 2].

Как указывается в [2] точные искусственные граничные условия должны быть нелокальными по времени и по пространству. Существует ряд подходов к построению локальных искусственных граничных условий, которые значительно более просты в реализации, но вносят существенную ошибку в решение, которую сложно оценить заранее. В данной работе предпринимается попытка построения нелокальных искусственных граничных условий, достаточно простых для реализации [3].

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Lv = f,$$

где L – линейный самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка. Для этого уравнения на искусственной границе внутренней области можно построить граничное условие вида

$$\frac{\partial v}{\partial n} = v \frac{\partial w}{\partial n},$$

где w – решение однородной задачи во внешней области с единичным граничным условием.

Исследовалась сходимость полученного решения. Показано, что норма разницы точного и приближенного решений стремится к нулю, при стремлении к бесконечности положения границы области и некоторых дополнительных условиях на решение.

Работоспособность метода проверялась на различных примерах, в которых оператор L соответствовал оператору Гельмгольца.

Работа поддержана грантом Правительства РФ по постановлению №220 «О мерах по привлечению ведущих ученых в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования» по договору №11.G34.31.0072, заключенному между Министерством образования и науки РФ, ведущим ученым и Московским физико-техническим институтом (государственным университетом).

Список литературы:

1. Givoli D. // Wave motion. 2004. Vol. 39. Pp. 319-326.
2. Tsynkov S.V. // Applied Numerical Mathematics. 1998. Vol.27. Pp.465-532.
3. Utyuzhnikov S.V. // Computers and Fluids. 2009. Vol. 38. Pp. 1710-1717.

Zavyalova N.A.¹, Utyuzhnikov S.V.^{1,2}

«A method for constructing simplified nonlocal artificial boundary conditions»

¹*Moscow institute of physics and technology, Dolgoprudniy, Russia,*

Natalia.zavyalova@gmail.com

²*University of Manchester, UK, E-mail2*

ДВУХСЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

А.И. Задорин

*Омский филиал Федерального государственного бюджетного
учреждения науки Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
Россия, zadorin@ofim.oscsbras.ru*

Исследуется двухсеточный метод решения линейного эллиптического уравнения с пограничными слоями на равномерной и на сгущающейся в пограничных

слоях сетках для уменьшения вычислительных затрат. В двухсеточном методе решение схемы находится на двух сетках, что позволяет повысить точность на основе метода Ричардсона. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

Two-grid method for linear elliptic equation with boundary layers on uniform and on dense in boundary layers meshes is investigated. Such method reduces the calculative efforts. In two-grid method solution of the difference scheme is constructed on two meshes, it can be used in Richardson method to increase the accuracy of the difference scheme. Numerical results are discussed.

Как известно, классические разностные схемы не обладают свойством равномерной сходимости в случае эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных. Обеспечить равномерную по параметру сходимость разностной схемы можно сгущением сетки в пограничных слоях или подгонкой схемы к погранслоевой составляющей. В обоих случаях разностная схема является пятиточечной и найти ее решение можно на основе итераций. Необходимое количество итераций можно уменьшить, если использовать двухсеточный метод. Тогда предварительные итерации делаются на вспомогательной, более грубой сетке. Далее начальное приближение для итераций на исходной сетке строится как интерполяция найденного решения на вспомогательной сетке.

В случае сингулярно возмущенной задачи двухсеточный метод должен учитывать наличие пограничных слоев и ранее почти не исследовался, отметим [1],[2]. В работе рассматривается следующая задача:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x + b(y)u_y - c(x, y)u = f(x, y), (x, y) \in \Omega,$$

$$u(x, y) = g(x, y), (x, y) \in \Gamma, \Omega = (0, 1)^2, \Gamma = \partial\Omega. \quad (1)$$

Предполагается, что функции a, b, c, f, g — достаточно гладкие,

$$a(x) \geq \alpha > 0, b(y) \geq \beta > 0, c(x, y) \geq 0, \varepsilon \in (0, 1].$$

При малых значениях параметра ε решение задачи (1) имеет регулярные пограничные слои у границ $x = 0, y = 0$.

Остановимся на случае равномерной сетки. В случае регулярных пограничных слоев схема экспоненциальной подгонки обладает свойством сходимости, равномерной по ε . От интерполяционной формулы так же необходимо требовать точности, равномерной по ε . Таким свойством не обладают полиномиальные интерполяционные формулы, применение которых в двухсеточном методе приводит к искажению найденного на вспомогательной сетке решения, тогда теряется преимущество двухсеточного метода в выигрыше в количестве арифметических действий. Для функции двух переменных с погранслоевыми составляющими построены интерполяционные формулы, точные на этих составляющих. Получены оценки погрешностей построенных формул, равномерные по ε . Получена оценка выигрыша в количестве арифметических действий при применении двухсеточного метода.

Наибольшее распространение при решении сингулярно-возмущенных задач получил подход, использующий сгущение сетки в пограничных слоях. В

работе исследован двухсеточный метод для задачи вида (1) в случае, когда разностная схема строится на сетке Шишкина. Вспомогательная сетка Шишкина вложена в исходную. Показано, что в этом случае погрешность формулы двумерной линейной интерполяции равномерна по ε . При применении двухсеточного метода решение разностной схемы известно на двух сетках, что предлагается использовать для повышения точности разностной схемы на основе метода экстраполяции Ричардсона. Проведены численные эксперименты, подтвердившие как выигрыш в количестве арифметических действий при применении двухсеточного метода, так и эффективность применения метода Ричардсона.

Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ (грант № 11-01-00875) и проекта ОМН РАН № 3.2 (2012).

Список литературы:

1. Задорин А.И., Задорин Н.А. // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 247-267.
2. Vulkov L.G., Zadorin A.I. // International Journal of Numerical Analysis and Modeling. 2010. V. 7. № 3. С. 580-592.

Zadorin A.I.

“Two-grid method for elliptic problem with boundary layers”.

Omsk filial of Sobolev Mathematics institute SB RAS, Omsk, Russia, zadorin@ofim.oscsbras.ru.

УСЕЧЕННЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ НА ОТКРЫТЫХ ГРАНИЦАХ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Н.А. Зайцев

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва
zaitsev@Keldysh.ru*

Приведены формулы Усеченных Условий Полной Прозрачности (УУПП) для изотропной упругой среды для всех границ трехмерной области, предложена методика модификации УУПП на ребрах и в вершинах расчетной области, предложена разностная схема для расчета УУПП, проведено сравнение УУПП с характеристическими граничными условиями, исследована зависимость амплитуды отраженной волны от размера расчетной области.

Formulas for Truncated Transparent Boundary Conditions (TTBC) for isotropic media are presented for all boundaries of 3D computational domain. A method for modification of the TTBC at edges and vertexes of computational domains and the corresponding finite-difference scheme are suggested. The TTBC are compared to known characteristic boundary condition. Dependency of amplitude of the reflected wave on size of the computational domain is investigated.

Предложенные в [1] граничные условия на открытых границах расчетной области можно рассматривать как усеченные условия полной прозрачности (УУПП), которые получаются из точных условий полной прозрачности [2, 3] отбрасыванием нелокальной части оператора.

В настоящей работе предполагается, что в окрестности открытой границы расчетной области и всюду вне её распространение волн описывается уравнениями Ламе:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}$$

с постоянными коэффициентами Ламе λ и μ , где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ — вектор перемещений. Тогда для границы $x_n = \text{const}$ УУПП можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_{n,1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} + \mathbf{B}_{n,2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} + \mathbf{B}_{n,3} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} = 0. \quad (1)$$

Для ребра расчетной области, образованного границами $x_n = \text{const}$ и $x_m = \text{const}$, УПП (1) модифицируется следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_{n,n} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_n} + \mathbf{B}_{m,m} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_m} = 0.$$

Проведено сравнение УУПП с характеристическими условиями вида

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{B}_{n,n} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_n} = 0, \quad (2)$$

известное в литературе как условие Клейтона-Энkvиста первого рода (см., например, [4]). Из рисунка 1 видно, что отражение от границ с УУПП значительно меньше.

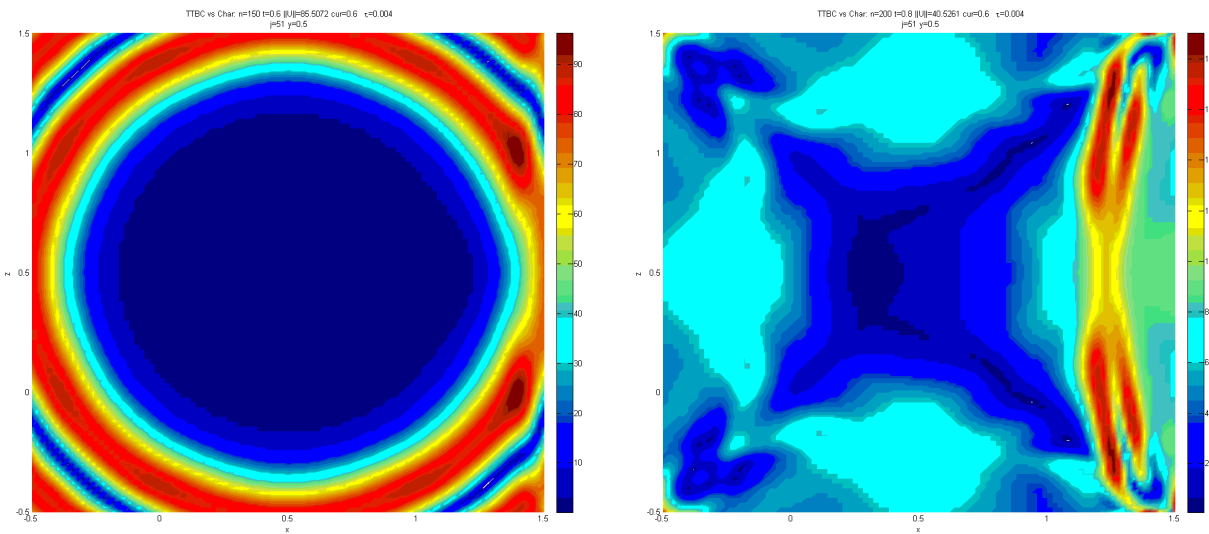


Рис. 1. Выход сферической волны из кубической области: $t = 0.6$ (слева) и $t = 0.8$ (справа). На правой границе характеристическое условие (2), на остальных границах УУПП.

Показано, что при увеличении размера расчетной области амплитуда отраженной от границ с УУПП волны быстро убывает (в проведенных расчетах при увеличении ребра расчетного куба в 2 раза ошибка убывает примерно в 10 раз).

Для численной реализации УУПП использовалась явная схема второго порядка аппроксимации, в которой предполагалось, что границы области проходят через полущелые точки сетки.

Работа поддержана РФФИ (гранты №11-01-00114 и № 13-01-00338).

Список литературы:

1. Софронов И.Л. // Доклады РАН. 2009. Т. 426. № 5. С. 602-604.
2. Софронов И.Л. // Доклады РАН. 1992. Т. 326. № 6. С. 453-457.
3. Sofronov I.L, Zaitsev N.A. // J. Comp. Appl. Math. 2010, Vol. 234. P. 1732-1738.
4. Higdon R.L. Absorbing boundary conditions for elastic waves // Geophysics, vol. 56, № 2, P. 231 – 241.

N.A. Zaitsev

«Truncated transparent boundary conditions on open boundaries for isotropic elastic media»

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia, zaitsev@Keldysh.ru

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ С ДИСКРЕТНЫМИ ПРОЗРАЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

А.А. Злотник¹, И.А. Злотник²

¹*НИУ Высшая школа экономики – Москва, Россия,
azlotnik2008@gmail.com*

²*НИУ Московский энергетический институт - Россия,
ilya.zlotnik@gmail.com*

Для решения нестационарного уравнения Шрёдингера в неограниченных областях построены, исследованы и апробированы новые эффективные численные методы с дискретными прозрачными граничными условиями: МКЭ любого порядка в случае прямой и метод с расщеплением по потенциалу в случае полосы.

For solving the time-dependent Schrödinger equation in unbounded domains, new effective numerical methods with discrete transparent boundary conditions are constructed, studied and tested: FEM of arbitrary order in the case of the axis and a splitting in potential method in the case of a strip.

Уравнение Шрёдингера играет важную роль во многих областях физики, и часто его необходимо численно решать в неограниченных областях. С этой целью используют приближенные прозрачные граничные условия (ПГУ) на искусственных границах [1]. К числу лучших из них относятся *дискретные* ПГУ (ДПГУ): для них отражения от искусственных границ полностью отсутствуют, вычисления устойчивы, а математическая основа прозрачна и позволяет строить строгую теорию устойчивости методов.

В данной работе для обобщенного нестационарного уравнения Шрёдингера рассмотрены задача Коши на прямой и начально-краевая задача в полосе. В случае прямой изучен двухслойный симметричный (типа Кранка-Никольсон) по времени и МКЭ любого порядка на конечном отрезке по пространству численный метод с ДПГУ [2,3]. Для него доказана равномерная по времени устойчивость в норме L_2 и в энергетической норме по отношению к начальным данным и свободному члену. Для вывода ДПГУ изучен вспомогательный метод на бесконечной сетке на прямой и для него доказана устойчивость и выведены законы сохранения; ДПГУ позволяют редуцировать его решение на конечный отрезок. Нелокальный оператор \mathcal{S}_{ref} в ДПГУ представляет собой дискретную свертку по времени, ядро которой, в свою очередь, является кратной дискретной сверткой последовательностей, выражаемых через многочлены Лежандра. Это ядро эффективно вычисляется с помощью быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ). Выполненные численные эксперименты наглядно демонстрируют высокую результативность использования МКЭ высокого порядка с ДПГУ, в том числе при расчете сильно осциллирующих решений и разрывном потенциале.

Численные методы, обычно используемые в случае полосы, являются неявными. При их реализации на каждом слое по времени возникают специальные комплексные системы линейных алгебраических уравнений, для которых эффективные методы решения пока не разработаны. С другой стороны, для упрощения реализации хорошо известна техника расщепления по физическим процессам.

В работе построено симметризованное расщепление по потенциалу типа Стренга для двухслойной симметричной схемы [4]. Для полученной трехшаговой схемы с ДПГУ доказана равномерная по времени устойчивость в норме L_2 . Для вывода ДПГУ рассмотрена вспомогательная схема с расщеплением по потенциалу на бесконечной сетке в полосе; для нее доказана равномерная по времени устойчивость в L_2 и выведен закон сохранения массы. Оператор \mathcal{S}_{ref} в ДПГУ для схемы с расщеплением такой же, как для исходной схемы; он является нелокальным по времени и записывается также с помощью ДПФ по переменной поперек полосы. Для реализации метода с расщеплением и ДПГУ в случае общего потенциала разработан и реализован эффективный прямой алгоритм вычисления решения, использующий прогонки вдоль полосы и БДПФ поперек полосы. Представлены результаты численных экспериментов по расчету туннельного эффекта для прямоугольных барьеров. Показано, что

применяемое расщепление по потенциалу не ведет к снижению точности результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012-2013 гг. (проект 11-01-0051), РФФИ (проект 12-01-90008-Бел) и гранта Минобрнауки РФ (соглашение № 14.В37.21.0864).

Список литературы:

1. Antoine X., Arnold A., Besse C. et al. // Commun. Comp.Phys. 2008. V.4. №4. P. 729-796.
2. Злотник А.А., Злотник И.А. // Доклады АН. 2012. Т. 447. № 2. С. 130–135.
3. Zlotnik A., Zlotnik I. // Kinetic and Related Models. 2012.V.5. №3. P.639-667.
4. Ducomet B., Zlotnik A., Zlotnik I. // 2013. <http://arxiv.org/abs/1303.3471>.

РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО-СТРАТОНОВИЧА В МОДЕЛИ АМОРФИЗАЦИИ ПОКРЫТИЯ

Т.А. Аверина¹, А.Л. Бондарева², Г.И. Змиевская²

¹*ИВМиМГ СО РАН, НГУ – Новосибирск,
ata@osmf.ssc.ru*

²*ИПМ им.М.В. Келдыша РАН – Москва,
bal310775@yandex.ru, zmig@mail.ru*

Построена двухуровневая схема для решения систем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито в смысле Стратоновича, описывающих разномасштабные физические процессы неравновесной стадии фазового перехода 1-го рода: кластеризации зародышей пор и броуновского движения в потоке ионов инертного газа ксенона с энергиями ~ 10 кэВ.

The two-level scheme is constructed for numerical analysis of stochastic differential equations Ito in the Stratonovich's sense, describing physical processes with different scales characteristic times of a non-equilibrium stage 1-st kind phase transition such as clustering of pores' nuclei and its Brownian motion into flux of ions inert gas xenon with energy of ~ 10 keV.

Математическая модель аморфизации упрочняющего покрытия (образования неточечных радиационных дефектов пористости в кристаллической решетке) описана квазилинейными кинетическими уравнениями Колмогорова-Феллера для эволюции размера зародыша поры и Эйнштейна-Смолуховского для его броуновской диффузии в объеме решетки, уравнениям ставится в соответствие система СДУ Ито, существование и единственность решения которой доказана. Для разномасштабных физических процессов модели построена двухуровневая модификация устойчивого

обобщенного метода типа Розенброка для решения систем СДУ в смысле Стратоновича. Для системы, состоящей из слоя $6H-SiC$ на субстрате облучение задано дозой 10^{16} см^{-2} . Эволюция пористости и напряжений объема рассчитаны с помощью решения 4×10^6 СДУ.

Благодарим В.С. Рябенского за вдохновляющую творческую активность, а РФФИ за поддержку грантами № 11-01-00282, № 12-01-00490.

T.A. Averina¹, A.L. Bondareva², G.I. Zmievskaya²

“Solution of stochastic differential equations of Ito-Stratonovich form in model amorphization cover “

¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk State University, ata@osmf.ssc.ru*

²*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, zmig@mail.ru*

РАЗНОСТНЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И.Ф. Потапенко¹, С.А. Карпов²

¹*ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация*

²*ВНИИА им. Н.Л. Духова, Москва, Российская Федерация*

Дан краткий обзор разностного и стохастического подходов к численному решению нелинейного кинетического столкновительного уравнения. Новый метод прямого статистического моделирования типа Монте-Карло сравнивается с результатами, основанными на полностью консервативных разностных схемах. Отмечены преимущества и недостатки этих методов.

A short review of deterministic and stochastic approaches to numerical solution of the nonlinear kinetic equation is given. A new DSMC method is tested by comparison with numerical results based on completely conservative difference schemes. Advantages and limitations of both methods are indicated.

Наиболее известное кинетическое уравнение, описывающее динамику газа и плазмы, – уравнение Больцмана (УБ)

$$D_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\beta} Q_{\alpha\beta}[f_{\alpha}, f_{\beta}], \quad D_{\alpha} f_{\alpha} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_{\alpha}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f_{\alpha}, \quad \int_{R_3} f_{\alpha} d^3 v = n_{\alpha}(r, t)$$

с интегралом столкновений

$$Q_{\alpha\beta}(f_{\alpha}, f_{\beta}) = \int_{R_3 \times S_2} d^3 \mathbf{w} d^2 \mathbf{n} g_{\alpha\beta}(u, \mu) \{ f_{\alpha}(\mathbf{v}') f_{\beta}(\mathbf{w}') - f_{\alpha}(\mathbf{v}) f_{\beta}(\mathbf{w}) \},$$

где $g_{\alpha\beta}(u, \mu) = u \sigma_{\alpha\beta}(u, \mu)$. В теории уравнения Больцмана дифференциальное сечение рассеяния $\sigma_{\alpha\beta}(u, \mu)$ в системе центра масс сталкивающихся частиц на

угол $\theta = \arccos \mu$, $|\mu| \leq 1$ предполагается заданной известной функцией (см., например, [1]). Оператор столкновений для заряженных частиц был получен Ландау [2] как аппроксимация интеграла столкновений Больцмана в предположении рассеяния на малые углы

$$Q_{\alpha\beta}^{(L)}(f_\alpha, f_\beta) = \frac{m_{\alpha\beta}^2}{2m_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d^3 \mathbf{w} u \sigma_{\alpha\beta}^{(tr)}(u) R_{ij}(\mathbf{u}) \left\{ \frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{m_\alpha}{m_\beta} \frac{\partial}{\partial w_j} \right\} f_\alpha(\mathbf{v}) f_\beta(\mathbf{w}),$$

а через 20 лет этот оператор был вновь выведен в форме нелинейного уравнения Фоккера-Планка (ФП) [3]. Для численного решения пространственно неоднородного кинетического уравнения естественно использовать стандартные методы расщепления по физическим параметрам, то есть рассматривать отдельно (а) уравнение Власова (непрерывное движение электронов и ионов во внешних и самосогласованных полях) $D_\alpha f_\alpha = 0$, $\mathbf{F}_\Lambda = e \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) / c \}$ и (б) кулоновские столкновения с интегралом ЛФП. Для численного решения первой стадии обычно используются методы частиц, которые хорошо изучены и представлены в литературе. Для стадии (б) чаще применяются конечно-разностные методы, история которых насчитывает не один десяток лет (см. работу [4] и ссылки в ней). Методы же типа Монте-Карло (МК) развиты хуже, хотя именно стохастический подход естественно объединяется с методом частиц. Среди стохастических методов решения уравнения ЛФП отметим методы [5,6], которые основаны на определенных оригинальных физических идеях, и общий подход к построению схем типа МК в [7]. Здесь мы представляем подход к численному моделированию уравнения ЛФП, который делает метод МК абсолютно ясным и простым в использовании.

Сущность его заключается в том, что для моделирования столкновений заряженных частиц используется УБ, аппроксимирующее уравнение ЛФП, с сечением квази максвелловского типа [8,9].

Как детерминистический, так и стохастический подходы обладают своими преимуществами и недостатками. Так конечно-разностный подход обеспечивает наиболее корректное и детальное описание функции распределения. Однако, для нелинейного кинетического уравнения ЛФП справедливы три закона сохранения: плотности частиц, импульса и энергии, выполнение которых в дискретном случае трудно обеспечить. В противоположность этому алгоритм метода типа МК строится исходя из того, что частицы после столкновения приобретают скорости в соответствии с законами сохранения. Методы типа МК обладают несомненным преимуществом для многомерных задач в силу их быстроедействия. Они эффективны, когда в решаемой задаче необходимо знать первые моменты функции распределения. Для описания же высоких моментов необходимо брать большое число разыгрываемых «частиц» - скоростей, что повышает существенно время расчета. Мы сравниваем оба подхода к моделированию кулоновских столкновений для типичных задач физики плазмы. Численные результаты, проведенные по методу прямого моделирования, сравниваются с

расчетами, проведенными по полностью консервативным разностным схемам [10, 4].

Список литературы

1. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. -М.: Мир, 1978, 496 с.
2. *Ландау Л.Д.* Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ, 1937, т.7, с.203.
3. *Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D.* Fokker-Planck equation for an inverse-square force // Phys.Rev., 1957, v.107, p.1-6.
4. *Potapenko I.F., Bobylev A.V., Mossberg E.* Deterministic and stochastic methods for nonlinear Landau-Fokker-Planck kinetic equations with applications to plasma physics // Transp. Theory Stat. Phys., 2008, v.37, p.113-170.
5. *Takizuka T., Abe H.* A binary collision model for plasma simulation with a particle code. // J.Comput.Phys., 1977, v.25, p.205-219.
6. *Nanbu K.* Theory of cumulative small-angle collisions in plasmas // Phys.Rev. E., 1997, v.55, p.4642-4652.
7. *Bobylev A.V., Nanbu K.* Theory of collision algorithms for gases and plasmas based on the Boltzmann equation and the Landau-Fokker-Planck equation // Phys. Rev. E. 61, 2000, p.4576-4586.
8. *Бобылев А.В., Потепенко И.Ф., Карпов С.А.* Метод Монте-Карло для двух-компонентной плазмы. – Математическое моделирование. № 9, 2012. С.35-49.
9. *A.V. Bobylev, I.F. Potapenko,* Monte Carlo methods and their analysis for Coulomb collisions in multicomponent plasmas, J. Comput. Phys. (2013), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2013.03.024>.
10. *Бобылев А.В., Потепенко И.Ф., Чуянов В.А.* Полностью консервативные разностные схемы для нелинейных кинетических уравнений типа Ландау (Фоккер-Планка) // ДАН АН СССР, 1980, т. 255, №6, с.1348-1352.

I. F. Potapenko¹, S.A. Karpov²

Difference and stochastic methods for numerical solutions of the nonlinear collisional kinetic equation.

¹ *KIAM RAS, Moscow, Russian Federation*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИММУННЫХ ПРОЦЕССОВ

А.В. Ким, В.М. Кормышев, М.А. Сафронов, А.В. Семенов

Уральский федеральный университет имени первого Президента России

Б.Н. Ельцина – Екатеринбург, Россия,

arkadiik@list.ru

В докладе рассматриваются вопросы компьютерного моделирования иммунных процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями с запаздыванием.

The report deals with the computer simulation of the immune processes described by ordinary differential equations and differential equations with delay.

В докладе рассматриваются вопросы компьютерного моделирования иммунных процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, функционально-дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с частными производными.

Основное внимание в работе уделено вопросам построения численных алгоритмов моделирования иммунных моделей.

Также обсуждаются вопросы программной реализации разработанных численных алгоритмов в рамках пакета прикладных программ Biomedical Software Package и на многопроцессорном вычислительном комплексе ИММ УрО РАН.

Работа поддержана программой президиума РАН «Фундаментальные науки – медицине», РФФИ (проекты 11-01-00117, 13-01-00089, 13-01-00110), Урало-Сибирским междисциплинарным проектом.

Список литературы:

1. Косова А.А., Ким А.В., Ким П.С., Ан Р.Н., Глушенкова В.В., Новоселов А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых биомедицинских процессов.
2. Ким А.В., Пименов В.Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.- Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004, 256 с.
3. Ким А.В., Красовский А.Н. Математическое и компьютерное моделирование систем с последействием. Изд-во УГТУ-УПИ: Екатеринбург, 2010.
4. Ким А.В., Кормышев В.М., Сафронов М.А. Параллельные алгоритмы линейно-квадратичной стабилизации систем с последействием // «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО'2012. Шестая международная конференция, Москва, 24–26 окт. 2012 г. – Труды: в 3 т. – М.: ИПУ РАН, 2012. – Том 2. – С. 103- 108.

A.V. Kim, V.M. Kormyshev, M.A. Safronov, A.V. Semenov

“Numerical simulation of the immune processes”

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia, arkadiik@list.ru

ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ ДЛЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

И.Ю. Колесников

*Геофизический центр РАН – Москва,
kol@wdcb.ru*

Полные системы неалгебраических функций формы для интерполяций Лагранжа построены как решения уравнений в частных производных на кубе. В рамках метода конечных элементов реализуются достоинства методов граничных элементов, а также бессеточных и спектральных методов.

Complete systems of the non-algebraic shape functions for the Lagrange interpolations are constructed as the PDEs solutions on a cube. The advantages of the boundary element methods, meshless and spectral methods are realized within the framework of finite element method.

С 60-х годов прошлого века по настоящее время наиболее «статичной» в методе конечных элементов (МКЭ) остается его аппроксимационная основа, которая ограничена выбором алгебраических функций формы: степенных и ортогональных полиномов в h-, p- и hp- версиях МКЭ [1].

С повышением порядка алгебраической аппроксимации в конечных элементах (КЭ) существенным неудобством является необходимость введения внутренних степеней свободы с последующим их устранением с помощью трудоемких численных процедур статической конденсации.

Нашей целью было расширение типа функциональных аппроксимаций в МКЭ и наделением его новыми полезными возможностями на пути введения полных систем неалгебраических функций формы [2].

Построены неалгебраические (из наборов синусоидальных, экспоненциальных и полилинейных функций) интерполяционные многочлены Лагранжа для равноотстоящих узлов на замкнутых множествах единичного куба: отрезке $[0,1]$; границе квадрата; границе куба; квадрате и кубе. В окрестностях углов реализуется наилучший линейный метод приближения в форме тригонометрических сумм Фавара. В одномерном случае на классе непрерывно дифференцируемых функций с ограниченной второй производной, порядок насыщения интерполяционного процесса характеризуется величиной $O(n^{-3})$, где n – число узлов вдоль отрезка $[0,1]$.

При расположении узлов на границе квадрата (с возможностью выбора различного числа точек на разных сторонах) интерполяционные суммы Лагранжа строились в форме точных решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа при задании на контуре тригонометрических интерполяций с улучшенным поведением в окрестностях углов.

Для равноотстоящих узлов на границе куба интерполяции Лагранжа находились как приближенные аналитические решения задачи Дирихле для

уравнения Лапласа в кубе с использованием: последовательного исключения узловых неоднородностей в вершинах, на ребрах и гранях куба; принципа суперпозиции; метода прямых и метода сеток в сочетании с конечными рядами Фурье. Проведенное сворачивание многократных сумм для вершин и точек ребер привело к минимально возможному числу слагаемых $O(n^2)$ в фундаментальных многочленах (функциях формы) для всех граничных узлов куба. Существенно, что и для квадрата и для куба, внутренние узлы здесь не вводятся для произвольного числа граничных узлов.

При построении фундаментальных многочленов для сетки равноотстоящих граничных и внутренних узлов в квадрате и кубе применялись смешанные интерполяции на основе суперпозиций построенных фундаментальных функций для граничных узлов и корректирующих их во внутренних узлах сетки многомерных конечных рядов Фурье.

В результате привлечения оператора Гельмгольца сконструированы фундаментальные функции, имеющие канонические типы изменения: плавный, затухающий и колебательный в зависимости от задания вещественной постоянной в операторе.

Построенные фундаментальные многочлены использованы при формировании совместных изопараметрических переходных КЭ с произвольным числом узлов (макроэлементов) и с разномасштабным представлением полевых функций (в соответствии с типом их изменяемости).

В результате, на основе МКЭ и его унифицированного математического обеспечения реализуются важные функциональные возможности методов граничных элементов, а также бессеточных и спектральных методов.

Обсуждается решение жестких задач МКЭ об изгибе тонких пластин.

Список литературы:

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
2. Горшков А.Г., Колесников И.Ю. // Изв. РАН. МТТ.1998. № 1. С.116-129.

Kolesnikov I.Yu.

«Complete systems of non-algebraic shape functions for finite element method»
Geophysical Center of the RAS, Moscow, Russia, kol@wdcb.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЛОКАЛЬНЫХ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Д.А. Силаев¹, Д.О. Коротаев²

¹МГУ им.М.В.Ломоносова, мех-мат ф-т – Москва,
dasilaev@mail.ru

²Институт Автоматизации Проектирования РАН – Москва,
dok-home@mail.ru

Данная работа посвящена использованию полулокальных сглаживающих сплайнов для построения методов решения дифференциальных уравнений, в т.ч. в частных производных, обладающих высоким порядком аппроксимации.

Semilocal smoothing splines allows us to build high-ordered methods of solving differential equations, including partial differential equations.

Построение полулокальных сглаживающих сплайнов (S-сплайнов) [1] высокого порядка аппроксимации позволило разработать численный метод решения дифференциальных задач для широкого круга двумерных и трёхмерных областей с кусочно-гладкой границей. S-сплайны состоят из полиномов, половина коэффициентов которых определяется условиями гладкой склейки, а остальные – методом наименьших квадратов. В основе решения лежит метод Галёркина, применённый к системе фундаментальных сплайнов, являющейся полной в рассматриваемом пространстве функций. Целевую область мы помещаем в круг или шар несколько большего радиуса (или покрываем системой таковых). Подобный подход позволяет точно учесть границу области, а также решать уравнения высокого порядка (с помощью сплайнов класса C^4 было решено бигармоническое уравнение в шаре). Используя S-сплайны класса C^2 было решено уравнение Пуассона в области с негладкой границей с точностью $O(h^6)$ [2]. Высокий порядок аппроксимации позволяет резко сократить кол-во точек, особенно в многомерных областях.

Список литературы:

1. Силаев Д.А., Коротаев Д.О и др. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C^1 // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2007. Вып 26. С.347-367
2. Силаев Д.А., Коротаев Д.О., Капустин С.В. Применение дважды непрерывно дифференцируемого S-сплайна // Вестник ЮУпГУ, 2009, сер. «Математика, физика, химия», выпуск 12. С. 37-43.

D.A.Silaev¹, D.O.Korotaev²

“Application of semilocal smoothing splines for solving differential tasks”

¹Lomonosov MSU, fac. of Mechanics and Mathematics, Russia, dasilaev@mail.ru

²ICAD RAS, Moscow, Russia, dok-home@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

С.В. Поляков, Т.А. Кудряшова

*Keldysh Institute for Applied Mathematics, Moscow ,
serge@imamod.ru, kudryashova@imamod.ru*

Моделирование сверхзвуковых течений газовых смесей является существенной частью большого круга научно-технических проблем, в том числе оно актуально при исследованиях газодинамических процессов вблизи различных космических объектов, составляет основу многих микро- и нанотехнологий. Цель данной работы – создание математической модели, позволяющей исследовать течения смеси газов в случае частичного нарушения гипотезы сплошности среды.

Supersonic flow of gas mixtures is present in a wide range of scientific and technical problems, including the study of comets, vacuum technology, and materials science. The supersonic expansion of mixed molecular gases is accompanied by several simultaneous nonequilibrium processes. The purpose of this paper is to design a model to research flow of the gas mixture in the case of a partial break of the continuity hypothesis.

В данной работе рассматривается проблема моделирования течений газовых смесей в случае приближения числа Кнудсена к границе применимости приближения сплошной среды. Одним из примеров такой ситуации можно считать истечение сверхзвуковых газовых струй в вакуум, а также взаимодействие струй с шероховатыми поверхностями и др. Для определённости остановимся на задаче сверхзвукового течения бинарной смеси газов в микроканалах технических систем. Математическая модель такого течения не может быть полностью сформулирована в рамках макроскопического подхода. Обычно в такой ситуации для описания течения смеси используют либо уравнения Навье-Стокса со специальными граничными условиями на стенках канала, либо переходят к решению уравнения Больцмана в том, или ином приближении. Оба способа имеют свои плюсы и минусы. Решение на основе уравнений Навье-Стокса позволяет существенно сократить вычислительные затраты, однако число Кнудсена в рамках такого подхода не может быть больше 0.1. Решение на основе уравнения Больцмана получается на порядок более затратным, однако диапазон чисел Кнудсена сверху ничем не ограничен. Он ограничен снизу величинами порядка 0.01, поскольку для меньших значений числа Кнудсена вычислительная процедура на базе уравнения Больцмана становится абсолютно неприемлемой с точки зрения вычислительных затрат.

Молекулярная динамика является одним из наиболее мощных вычислительных подходов, эффективно применяемых для моделирования физических, химических и биологических процессов. Метод молекулярной динамики (ММД) обладает высоким пространственно-временным разрешением и позволяет получить информацию о процессах, происходящих в атомно-молекулярных масштабах и на временах порядка нескольких наносекунд.

Использование ММД в полном объёме для реальных размеров области и конечных промежутков времени представляется пока преждевременным, даже при наличии очень мощных суперкомпьютеров. На наш взгляд наиболее продуктивным подходом к задачам подобного класса может оказаться комбинация макроскопического подхода, описывающего среднее поле течения, и коррекция характеристик течения с помощью статистических подходов.

В данной работе макроскопический подход базируется на уравнениях квазигазодинамики (КГД), а коррекция параметров течения производится с помощью ММД. Предлагаемый общий алгоритм расчёта представляет собой расщепление по физическим процессам. КГД система рассматривается в релаксационном приближении и является обобщением квазигазодинамических уравнений на случай смеси газов. Она решается методом конечных объёмов на подходящей сетке. Система уравнений молекулярной динамики используется в качестве подсеточного алгоритма (применяющегося внутри каждого контрольного объёма). В рамках ММД алгоритма взаимодействие частиц описывается с помощью потенциала, который определяется исходя из свойств моделируемого вещества, его агрегатного и термического состояний. Для расчета сил взаимодействия молекул используется хорошо зарекомендовавший себя потенциал Леннарда-Джонса, позволяющий с минимальными вычислительными затратами получать достаточно точные результаты для систем, характеризующихся парным взаимодействием, в частности, для инертных газов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты №№ 11-01-12086-офи-м, 12-01-00339).

Список литературы:

1. Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд. Молекулярная теория газов и жидкостей. Издательство иностранной литературы. Москва. 1961
2. T.G. Elizarova, Quasi-gasdynamic equations. Springer, 286 p.p., 2009
3. A. Ramos, G. Tejeda, J.M. Fernandez, S. Montero. Nonequilibrium Processes in Supersonic Jets of N₂, H₂, and N₂ + H₂ Mixtures: (I) Zone of Silence. J. Phys. Chem. A 2009, 113, 8506–8512 p.p.
4. G.A.Bird. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow. Oxford Science simulations. 1994.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ: КОНСТРУКЦИЯ, АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ, ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

С.И. Мартыненко

*Центральный Институт Авиационного Моторостроения, Москва, Россия
Martynenko@ciam.ru*

В докладе представлена универсальная многосеточная технология – вариант геометрическим многосеточных методов с проблемно-независимыми компонентами.

Приведены результаты анализа сходимости и объёма вычислительной работы, представлены результаты вычислительных экспериментов (от уравнения Пуассона до уравнений Навье-Стокса).

The report represents robust multigrid technique as a variant of geometric multigrid methods with problem-independent components. Results of the convergence analysis and the computational efforts are given; results of computational experiments (from the Poisson equation up to the Navier-Stokes equations) are presented.

Целью данной работы является разработка высокоэффективного метода решения широкого класса краевых задач на структурированных сетках. При этом требуется, чтобы алгоритм не содержал проблемно-зависимых компонент для исключения возможной его адаптации к конкретной задаче. Подобный алгоритм предназначен для программного обеспечения, устроенного по принципу «чёрного ящика».

В основе разработанного алгоритма, получившего название универсальная многосеточная технология (УМТ) [1-4], лежат априорная адаптация краевых задач к УМТ, оригинальная последовательность сеток (многосеточная структура), построенных удвоением шага, интегро-интерполяционный метод аппроксимации и метод Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных. Каждый сеточный уровень состоит из 3^d сеток, где l есть номер сеточного уровня, а $d=2,3$. Благодаря использованию дополнительных сеток удаётся исключить интерполяцию из УМТ. Контрольные объёмы на более грубых сетках построены объединением 3^d контрольных объёмов на более мелких сетках, поэтому оператор сужения не зависит от решаемой задачи. В многосеточных итерациях УМТ отсутствует предварительное сглаживание для применения к решению отдельных нелинейных краевых задач.

Для анализа сходимости получен вид матрицы многосеточных итераций. В рамках традиционного анализа сходимости многосеточных методов, основанного на свойствах сглаживания и аппроксимации, показано, что количество многосеточных итераций УМТ не зависит от величины шага сетки. Однако, в отличие от классических многосеточных методов, стоимость многосеточной итерации УМТ выше и составляет $M \lg N$ арифметических операций, где N – количество неизвестных [5]. Таким образом УМТ обладает близкой к оптимальной скоростью сходимости. Получена оценка проигрыша в эффективности.

В качестве сглаживателя использован метод Зейделя с блочным упорядочиванием неизвестных, которое позволяет применять УМТ к решению седловых задач (обобщение метода Ванки).

Для иллюстрации приведены результаты решения ряда трёхмерных краевых задач (уравнение Пуассона, анизотропное уравнение, уравнение с разрывными коэффициентами, нелинейное уравнение теплопроводности и уравнений Навье-Стокса). Все задачи решены унифицированным образом без внесения каких-либо изменений в вычислительный алгоритм, единственным варьируемым параметром является количество сглаживающих итераций.

По сравнению с классическими многосеточными методами УМТ не содержит проблемно-зависимых компонент, что приводит к увеличению объёма вычислительной работы $\sim \lg N$ в раз.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00109).

Список литературы:

1. Мартыненко С.И. Универсальная многосеточная технология для численного решения краевых задач на структурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. – 2000. – Т.1, раздел 1. – С.85–104.
2. Martynenko S.I. Robust Multigrid Technique for black box software // Comp. Meth. in Appl. Math. – 2006. – v. 6, № 4. – P. 413–435.
3. Мартыненко С.И. Универсальная многосеточная технология // Математическое моделирование. – 2009. – Т.21, № 9. – С.66–79.
4. Martynenko S.I. Potentialities of the Robust Multigrid Technique // Comp. Meth. in Appl. Math. – 2010. – v. 10, № 1. – P. 87–94.
5. Мартыненко С.И. К вопросу о сходимости универсальной многосеточной технологии // Математическое моделирование. – 2010. – Т.22, № 10. – С.18–34.

S.I. Martynenko

«Robust Multigrid Technique: construction, convergence analysis, solution of the boundary value problems»

Central Institute of Aviation Motors, Moscow, Russia, Martynenko@ciam.ru

О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ WENO ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Н.А. Михайлов

*ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им.академ. Е.И.Забабахина",
n.a.mikhaylov@vniitf.ru*

Путём численного анализа показывается, что в общем случае разностные схемы WENO высокого порядка аппроксимации имеют лишь первый порядок сходимости в гладкой части обобщённого решения за фронтом ударной волны.

The numerical analysis has shown that high order WENO schemes have only the first order of convergence rate in the smooth part of solution behind a shock front.

Проблеме понижения порядка сходимости современных разностных схем высокого порядка классической аппроксимации в гладкой части обобщённого решения за фронтом ударной волны (УВ) посвящён ряд работ [1, 2, 3]. В них было показано, что такие явные двухслойные схемы для расчёта разрывных

решений гиперболических систем законов сохранения, как TVD схема Хартена второго порядка, схема ENO 4-ого порядка, в общем случае имеют лишь первый порядок сходимости за фронтом УВ. Причина этого явления заключается в том, что в случае систем законов сохранения точность решения за фронтом УВ существенно зависит от точности передачи условий Гюгонио, так как решение в этой области определяется характеристиками, по крайней мере, одна из которых выходит с фронта УВ [3].

В [4] было сделано предположение, что явные двухслойные схемы WENO благодаря большей гладкости численных потоков, чем у их предшественников - схем ENO [5], способны сохранять высокий порядок сходимости за фронтом УВ.

В настоящей работе проверено это предположение путём численного анализа на примере системы уравнений теории мелкой воды

$$H_t + Q_x = 0, \quad Q_t + \left(\frac{Q^2}{H} + g \frac{H^2}{2} \right) = 0,$$

где $H(t, x)$ и $Q(t, x)$ – глубина и расход жидкости, g – ускорение свободного падения, $x \in (0, X)$, $X=14$. Начальные и граничные условия взяты из [3]:

$$H(0, x) = 2 - \frac{2}{\pi} \arctg(x), \quad Q(0, x) = 0, \quad Q(t, 0) = \alpha t, \quad Q(t, X) = \beta t$$

В решении задачи вследствие градиентной катастрофы в момент времени $T \approx 1$ образуется УВ (бор), распространяющаяся в положительном направлении оси x с переменной скоростью.

В работе рассматривались конечно-объёмные схемы WENO 3-его и 5-го порядков аппроксимации, принадлежащие типу Годунова [5].

Порядок сходимости определялся с помощью метода Рунге. Для оценки точности передачи условий Гюгонио использовалась интегральная норма

$$\|u(t, \bullet)\|_{[x, X]} = \int_x^X u(t, y) dy \quad [4] \quad (u(t, y) \geq 0).$$

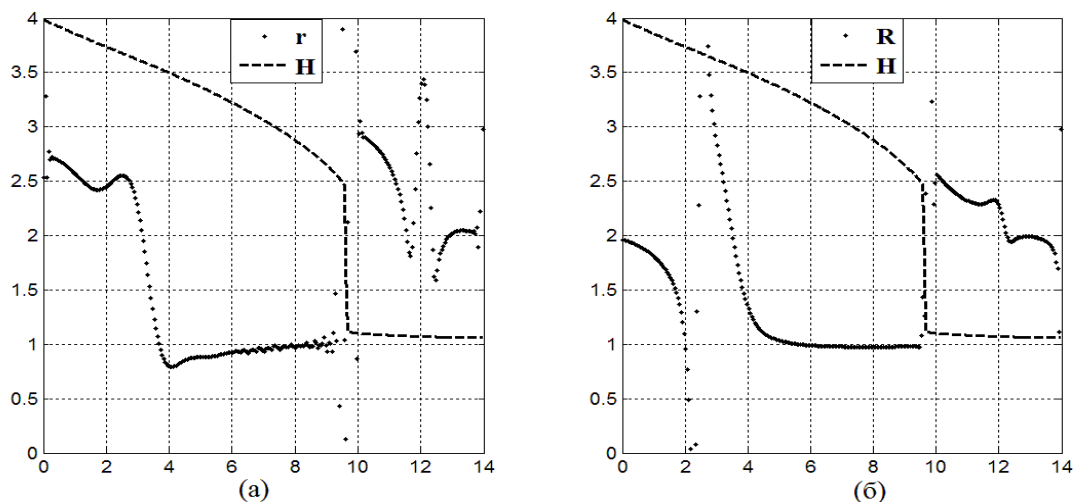


Рис.1. Поточечные (а) и в интегральной норме (б) порядки сходимости для глубины H при расчёте по схеме WENO 3-его порядка на момент времени $T=1.8$.

Из графиков на рис.1 видно, что за фронтом УВ в области её влияния порядки поточечной τ и интегральной R сходимости не превышают первого. Результаты для схемы WENO 5-ого порядка аналогичны. Отсюда видно, схемы WENO в общем случае имеют лишь первый порядок сходимости в гладкой части обобщённого решения за фронтом УВ.

Список литературы

1. Casper J., Carpenter M.H. Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // SIAM J. Sci. Comput. 1998. 19. С. 813-828.
2. Engquist B., Sjögreen B. The convergence rate of finite difference schemes in the presence of shocks // SIAM J. Numer. Anal. 1998. 34. С.2464-2485.
3. Остапенко В.В. О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // ЖВМ и МФ. 1997. 37. С. 1201-1212.
4. Ostapenko V.V. On convergence of high order shock capturing difference schemes // AIP Conf. Proc. 2010. 1301. С. 413-425.
5. Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservations laws // NASA/CR-97-206253, ICASE Report No. 97-65. 1997.

N.A. Mikhaylov

“On convergence rate of WENO schemes behind a shock front”

Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Research Institute of Technical Physics, n.a.mikhaylov@vniitf.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЕ

А.А. Недоступ¹, А.О. Ражев²

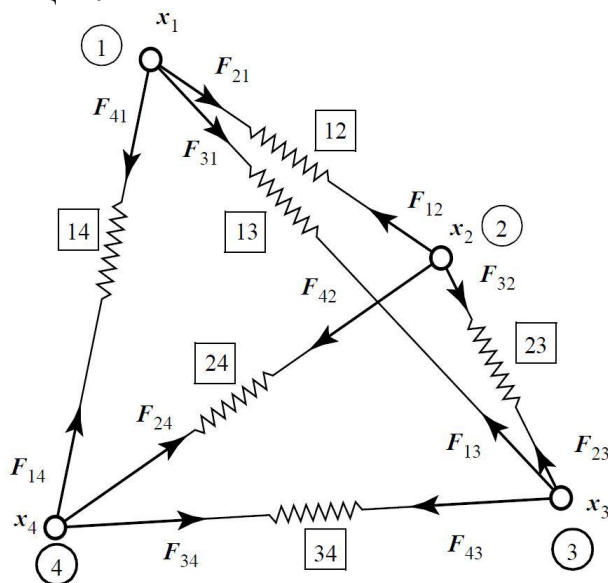
¹*ФГБОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»,
nedostup@klgtu.ru*

²*ФГБОУ ВПО «Калининградский государственный технический университет»,
progacpp@live.ru*

В данной статье описана обобщенная математическая модель сетных орудий промышленного рыболовства, не использующая сложных систем уравнений [1]. Описан алгоритм для ее моделирования на современных персональных компьютерах и рабочих станциях в гетерогенной среде с применением как центрального, так и графического процессоров.

This article describes a generalized mathematical model of commercial fishing netting without using complex systems of equations [1]. An algorithm is described for its modeling on modern personal computers and workstations in a heterogeneous environment with both central and graphics processors.

Предложенный алгоритм базируется на шарнирно-стержневой модели (см. рисунок) [2]. В данной модели каждой нитке сопоставляется упругий стержень 12, 23, 34, 14, а каждому узлу - шарнир 1, 2, 3, 4. Для учета противодействий изгибам в узлах в модель введены дополнительные стержни 13, 24. Удлинение стержня зависит от силы натяжения (1). В разработанном алгоритме решается задача минимизации двух групп однотипных функций (2) и (3), связывающих силовые и геометрические характеристики. В группе (2) каждому узлу, а в группе (3) каждому стержню ставится в соответствие своя функция.



$$\Delta L = f(E, L_0, F_{ij}, A) \quad (1)$$

$$f_1 = \left| \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}_g + \vec{F}_a + \vec{R} \right| \quad (2)$$

$$f_2 = L_0 + \Delta L - |\vec{D}_{ij}| \quad (3)$$

Рисунок. Шарнирно-стержневая модель ячеи

где ΔL - удлинение, L_0 - длина нитки в свободном состоянии, E - модуль упругости, A - площадь сечения, F_{ij} - сила натяжения (см. рис.), F_g - сила тяжести, F_a - архимедова сила, R - гидродинамическая сила, D_{ij} - расстояние между узлами, n - количество инцидентных узлу стержней.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-08-00096-а.

Список литературы:

1. Розенштейн М.М., Недоступ А.А. Механика орудий рыболовства. М. - Моркнига. - 2011. 528 с.
2. Недоступ А.А., Володько Д.А., Ражев А.О. Гидродинамический расчет рыболовной сети// Сборник трудов V международной научно-практической конференции «Инженерные системы - 2012». РУДН. Москва. 2012. -С.27-31.

A.A. Nedostup¹, A.O. Ragev²

«Mathematical modeling of engineering structures in the netting heterogeneous environment»

¹Kaliningrad state technical university, nedostup@klgtu.ru

²Kaliningrad state technical university, progacpp@live.ru

ДЕТАЛЬНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ НА БОЛЬШИХ ТЕРРИТОРИЯХ

А.П. Николаев, Л.А. Николаев

*ООО "Геодин", г. Москва, Россия,
info@geodin.ru*

Предлагается алгоритм детального моделирования геофильтрации на больших территориях, построенный на технологиях пространственного распараллеливания и "wiki-modelling".

The text reveals the algorithm of detailed geofiltration modelling over large areas based on the technologies of spatial parallelism and "wiki-modelling".

Для прогноза изменения режима подземных вод при строительстве и эксплуатации зданий и сооружений требуется разработка детальных трехмерных численных моделей геофильтрации, максимально учитывающих техногенные воздействия, как непосредственно на участке строительства, так и на окружающей территории [1]. Детальность гидрогеологических моделей можно охарактеризовать количеством блоков модели на единицу длины, например на 1 милю - bpm (blocks per mile). Если для решения задач региональной оценки ресурсов подземных вод достаточно моделей с разрешением 1-5 bpm, то для задач гидрогеологического обоснования проектов городского строительства оптимальным можно считать разрешение модели 5000 bpm, т.е. размером блока в 0.3 м. В этом случае в пределах стройплощадки могут быть достаточно точно смоделированы иглофильтры, скважины, тонкие ограждения котлованов и многие другие воздействия [2].

Для моделировании больших территорий предлагается следующий алгоритм, реализующий технологию пространственного распараллеливания вычислений:

- область моделирования разделяется в пространстве на достаточно маленькие фрагменты - кластеры, имеющие на границах зоны перекрытия, т.е. область накрывается кластерами как "черепицей"; оптимальный размер кластера для решения задач гидрогеологического прогнозирования - 333*333 блока или 100*100 м в плане;

- параллельные расчеты в кластерах ведутся на многопроцессорном вычислительном комплексе;

- на каждом шаге по времени в качестве граничного значения для каждого кластера берутся вычисленные уровни из соседнего кластера в узле, достаточно далеко удаленном от края, тем самым автоматически реализуются граничные условия 4 рода [3]; зона перекрытия кластеров принимается с учетом наличия зон возмущения вблизи границы и является переменной;

- количество единовременно вычисляемых кластеров может увеличиваться при расширении влияния проектных возмущений.

Сформулированы требования к технологии моделирования:

- возможность моделирования территории неограниченного размера;
- хранение детальной модели и выполнение расчетов на централизованном вычислительном ресурсе (ЦВР);
- подготовка и передача удаленными операторами на ЦВР исходных данных по участкам детального моделирования конкретных объектов строительства - данные о геологическом строении и гидрогеологических условиях по результатам новых инженерно-геологических изысканий, параметры и этапы строительства и эксплуатации проектируемого объекта, сценарии прогнозных расчетов;
- автоматическая модернизация детальной модели и решение обратной задачи на ЦВР;
- производство практических прогнозных вычислений на ЦВР;
- получение результатов расчета на ЦВР и их визуализация на удаленном рабочем месте.

Таким образом реализуется технология "wiki-modelling" - постоянная коллективная модернизация детальной геофильтрационной модели с использованием единого аппарата моделирования всеми операторами.

Алгоритм реализован в виде программы Tiler с использованием для решения уравнения фильтрации локально-одномерного метода и опробована на тестовых примерах. При этом результаты расчетов для двух кластеров с 10% перекрытием практически совпали с результатами расчета для единой модели.

Список литературы:

1. Ломакин Е.А., Мироненко В.А., Шестаков В.М. Численное моделирование геофильтрации. - М.: Недра. 1988, 228 с.
2. Николаев А.П., Николаев Л.А. Детальное математическое моделирование динамики подземных вод на больших территориях // Перспективы развития инженерных изысканий в строительстве в Российской Федерации. Материалы 8-й общеросс. конф. изыскательских организаций. 13-14 декабря 2012 г. М.: ООО "Геомаркетинг". 2012. С. 174-175.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - М.: Едиторал УРСС, 2003. - 784 с.

A.P. Nikolaev, L.A. Nikolaev

«Detailed numerical modeling of geofiltration on large areas»

ООО "Geodin", Moscow, Russia, info@geodin.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ РАСПАДА РАЗРЫВОВ В МЕТОДЕ SPH

С.А. Медин^{1,2}, А.Н. Паршиков¹

¹ОИВТ РАН, ²МФТИ,

medin@ihed.ras.ru

¹ОИВТ РАН,

parshikov@ihed.ras.ru

Представлен усовершенствованный метод SPH, основанный на применении решения задач о распаде разрыва в изотропных, упругих, теплопроводных и вязких средах. Решены задачи по высокоскоростному пробиванию, ударному нагружению пористых материалов, детонации пористых взрывчатых веществ и волнам разрушения в стеклах.

The modified method SPH based on interparticle discontinuity breakup relationships in isotropic, elastic, heat-conducting and viscous media is presented. The corresponding algorithms are developed. The various problems on the hypervelocity impact, the shock loading of porous materials, the heterogeneous detonation and the failure wave propagation are considered.

Метод SPH является бессеточным лагранжевым численным методом решения уравнений механики сплошных сред. В этом методе среда представляется набором частиц, значения физических переменных в которых аппроксимируются в виде [1]

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}' \quad \text{или} \quad f(\mathbf{r}_i) = \sum_j \frac{m_j f(\mathbf{r}_j)}{\rho_j} W_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h),$$

где функция $W_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$ является сглаживающим ядром, и h – дистанция сглаживания между базовой частицей i и частицами окружения j , при этом обычно принимается, что $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < 2h$. Особенность метода SPH состоит в

вычислении градиента переменной $f(\mathbf{r}_i)$: $\nabla f(\mathbf{r}_i) = \sum_j \frac{m_j f(\mathbf{r}_j)}{\rho_j} \nabla W_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$.

Это выражение позволяет записать правые части уравнений сохранения в SPH-форме. В стандартном методе SPH для обеспечения монотонности решения вводится искусственная вязкость. Авторами предложено усовершенствование метода SPH, не требующее введения искусственной вязкости [2]. При этом вводится в рассмотрение точка контакта для каждой пары частиц i и j . В этой точке из решения задачи о распаде разрыва, точного или приближенного, определяются значения скорости \mathbf{U}_{ij}^* и давления P_{ij}^* на каждый момент времени. Модификация стандартных уравнений SPH осуществляется заменой в правых частях уравнений переменных скорости и давления в частицах их значениями в точке контакта: $\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_j \rightarrow 2\mathbf{U}_{ij}^*$ и

$P_i + P_j \rightarrow 2P_{ij}^*$. Для случая сред с прочностью используется $\sigma_i^R + \sigma_j^R \rightarrow \sigma_{ij}^{*R}$, где σ_{ij}^{*R} - вычисленный по решению задачи о распаде разрыва вектор напряжений на площадке, ортогональной к направлению R от частицы i к частице j . При решении задач теплопроводности для вычисления тепловых потоков в контактирующих частицах используется контактная температура из решения задачи о распаде температурного разрыва

$$T_{ij}^* = (T_i \sqrt{\lambda_i \rho_i C_{vi}} + T_j \sqrt{\lambda_j \rho_j C_{vj}}) / (\sqrt{\lambda_i \rho_i C_{vi}} + \sqrt{\lambda_j \rho_j C_{vj}}).$$

Для течений вязких жидкостей скорость в точке контакта вычисляется по аналогичной формуле (при подстановке коэффициента вязкости η вместо λC_V). Для перечисленных сред – изотропных, упругих, теплопроводных и вязких – приводятся решения тестовых задач.

Модифицированный метод SPH был эффективно применён для мезомеханического моделирования сложных течений, в которых многокомпонентная структура гетерогенных материалов задаётся многосвязной областью и мезоструктура материала представляется в явном виде. В данном докладе представлены результаты мезомеханического моделирования пробития преград ударниками, распространения ударных волн в пористом алюминии и построения ударных адиабат пористого вещества по известной адиабате сплошного вещества, процессов детонации пористых взрывчатых веществ, а также результаты моделирования волн разрушения в стёклах. Во всех перечисленных случаях метод показал хорошее совпадение расчётных и экспериментальных данных.

Список литературы

1. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1977. V. 181. P.375.
2. Parshikov A. N. and Medin S. A. Smoothed Particle Hydrodynamics Using Interparticle Contact Algorithms // J. Comp. Phys. 2002. V.180. P.358.

S.A. Medin^{1,2}, A.N. Parshikov¹

Применение соотношений распада разрывов в методе SPH

¹Joint Institute for High Temperatures, RAS, Moscow,

²Moscow Institute of Physics and Technology, Russia, medin@ihed.ras.ru

¹Joint Institute for High Temperatures, RAS, Moscow, Russia, parshikov@ihed.ras.ru

О ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

И.А. Ильин¹, Д.С. Нощенко², А.С. Пережогин^{1,2}

¹*Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО
РАН – п.Паратунка, Камчатский край, Россия,
d72156@gmail.com*

²*Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга –
Петропавловск-Камчатский, Россия*

Предложен подход для численного для уравнений с дробной производной порядка от 1 до 2. В численной схеме решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка модифицирована основная матрица системы для случая степени $3/2$. Приведены результаты численного решения для системы с дробным оператором, которые совпадают с решением для оператора Капуто.

Numerical method for solving ordinary differential equations of the order from 1 to 2 is represented. In the numerical scheme for solving ordinary differential equations of the second order the basic matrix of the system is modified for $3/2$ order. The results of numerical solutions for linear system matches to Caputo's fractional operator.

Математическое моделирование физических процессов, которые обладают фрактальными свойствами, выполняется с помощью аппарата дробного дифференцирования [1]. Круг физических задач, в которых возникают операторы дробного дифференцирования, достаточно широк, начиная от задач теории упругости до диффузионно-волновых процессов [2].

Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения с модифицированной матрицей, соответствующей дробной степени разностного оператора первого порядка, было рассмотрено в [3]. В настоящей работе используется задача Коши для уравнения второго порядка с начальными условиями при построении дробного аналога разностной системы в случае нецелого порядка $3/2$. Численное решение для данной задачи будем искать из системы линейных алгебраических уравнений. Из основной матрицы системы, которая соответствует разностному оператору второго порядка, построена модифицированная матрица на основе дробной степени матрицы разностного оператора первого порядка.

На рисунке 1 приведены численные расчеты для двух линейных алгебраических систем с целым порядком, равным 2, и дробным порядком $3/2$. В случае дробного порядка решение представляет собой затухающие колебания со степенным затуханием. Численное решение системы $3/2$ порядка совпадает с решением задачи Коши, в которой взамен классической производной использует производная Капуто [2].

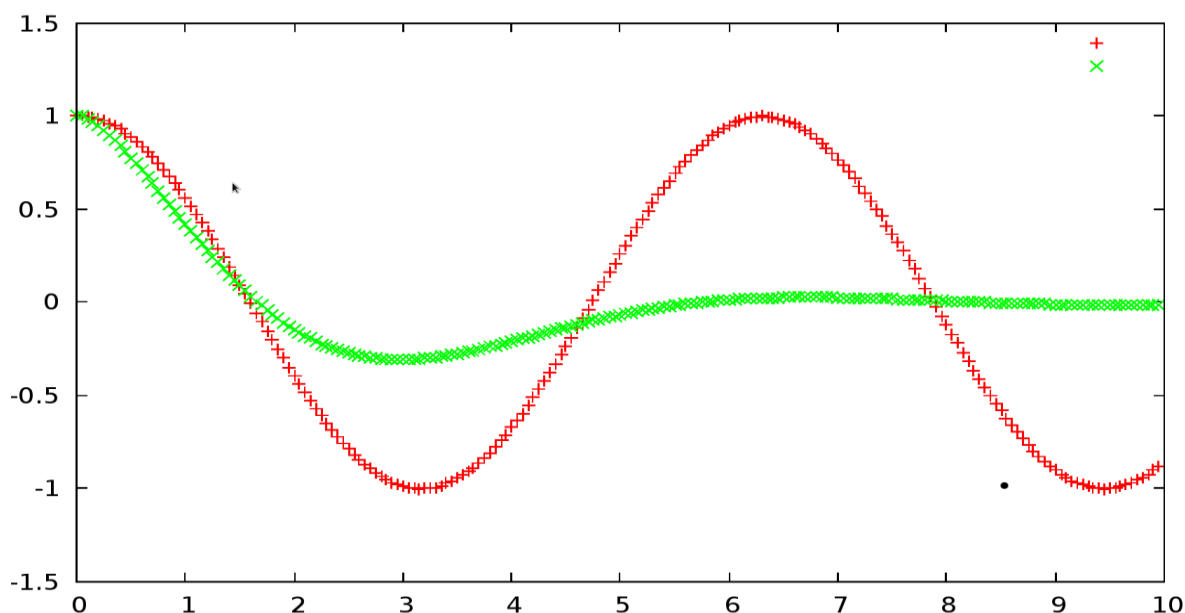


Рис. 1. Численное решение уравнений; + — порядок оператора равен 2; x — порядок оператора равен 3/2.

Из структуры системы линейных уравнений установлено, что вычисление решения на последующих шагах зависит от всех предыдущих значений решения. В таком случае, система обладает памятью, но возникают только затухающие решения в случае дробного порядка от 1 до 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО "Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга" на 2012-2016 гг.

Список литературы:

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. Москва, Ижевск: РХД, 2011. - 568 с.
3. Ильин И.А., Нощенко Д.С., Пережогин А.С. О дробной степени разностного оператора для обыкновенного дифференциального уравнения // Сборник докладов Второй международной конференции молодых ученых "Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики". г. Нальчик. 2012. С. 107-109.

I.A.II'in¹, D.S.Noshchenko², A.S.Perezhogin^{1,2}

«Fractional power of discrete second order operator of ordinary differential equation»

¹*Institute of Cosmophysical Researches and Radiowave Propagation, Paratuna, Kamchatka, Russia, d72156@gmail.com*

²*Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia*

²*Dukhov VNIIA, Moscow, Russian Federation*

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЯХ

Ю.М. Раппопорт

*Институт автоматизации проектирования, РАН – Москва,
jmrar@landau.ac.ru*

Разработан алгоритм численного решения некоторых смешанных краевых задач математической физики путем использования интегральных преобразований Конторовича-Лебедева и парных интегральных уравнений. Даны приложения к численному решению уравнения Гельмгольца в клиновидных областях.

The new applications of modified integral Kontorovitch–Lebedev transforms for the solution of some problems of mathematical physics are given. The algorithm of numerical solution of some mixed boundary value problems for the Helmholtz equation in wedge domains is developed.

Парные интегральные уравнения с функцией Макдональда мнимого индекса $K_{i\tau}(x)$ в ядре были введены Лебедевым и Скальской [1]

$$\int_0^\infty M(\tau) \tau \tanh(\alpha\tau) K_{i\tau}(kr) d\tau = rg(r), 0 < r < a,$$

$$\int_0^\infty M(\tau) K_{i\tau}(kr) d\tau = f(r), r > a,$$

где $g(r)$ и $f(r)$ – заданные функции. Они показали [1], что решения этих уравнений могут быть определены в виде однократных квадратур от решений интегральных уравнений Фредгольма второго рода с симметричным ядром, содержащим функцию Макдональда комплексного порядка $K_{1/2+i\tau}(x)$

$$M(\tau) = \frac{2\sqrt{2}\sinh(\pi\tau)}{\pi\sqrt{\pi}\sinh(\alpha\tau)} \int_0^\infty \psi(t) \operatorname{Re} K_{1/2+i\tau}(kt) dt,$$

$$\psi(t) = h(t) - \int_0^\infty K(s,t) \psi(s) ds, a \leq t < \infty,$$

где $\operatorname{Re} K_{1/2+i\tau}(z)$ – вещественная часть функции Макдональда комплексного порядка $1/2 + i\tau$. В случае $g(r) = 0$

$$h(t) = -\frac{\sqrt{k}\exp(kt)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{\exp(-kr)f(r)}{\sqrt{r-t}} dr$$

$$K(s,t) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sinh[(\pi-\alpha)\tau]}{\sinh(\alpha\tau)} \operatorname{Re} K_{1/2+i\tau}(ks) \operatorname{Re} K_{1/2+i\tau}(kt) d\tau.$$

Даны приложения интегральных преобразований Конторовича-Лебедева и парных интегральных уравнений к решению смешанных краевых задач. Задачи диффузии и упругости сводятся к решению соответствующей смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u - k^2 u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\varphi=\pm\alpha, 0 < r < a} (r) = g(r), \quad u \Big|_{\varphi=\pm\alpha, r > a} (r) = f(r),$$

$u|_{r \rightarrow 0}$ – ограничено, $u|_{r \rightarrow \infty}$ – ограничено.

Решение задачи как получено Лебедевым определяется в виде интегральных преобразований Конторовича–Лебедева

$$u(r, \varphi) = \int_0^\infty M(\tau) \frac{\cosh \varphi \tau}{\cosh \alpha \tau} K_{it}(kr) d\tau,$$

где $M(\tau)$ есть решение парного интегрального уравнения.

Проведено численное решение. Предложены экономные методы вычисления ядер интегральных уравнений, основанные на квадратурных формулах Гаусса по узлам полиномов Лагерра. Для увеличения точности и быстродействия алгоритмов использованы процедуры предварительного преобразования интегралов и выделения особенности в подинтегральном выражении. Рассмотрены случаи, допускающие полное аналитическое решение задачи. Рассмотренные примеры демонстрируют эффективность этой методики при численном решении смешанных краевых задач для уравнения Гельмгольца в клиновидных областях, в том числе задач упругости и горения [2]. Размерность задачи при использовании указанного подхода понижается на единицу, что является существенным преимуществом этого метода. Дана оценка погрешности.

Работа выполнена при поддержке Тематической программы по обратным задачам и изображениям Филдсовского института.

Список литературы:

1. Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, "Парные интегральные уравнения, связанные с преобразованием Конторовича–Лебедева Прикл. Матем. и Механ. 38, no.6 (1974) 1090–1097.
2. J. M. Rappoport, "Dual integral equation method for some mixed boundary value problem in: Advances in analysis. Proceedings of the 4th International ISAAC Congress, World Scientific, 2005, pp.167–176.

J.M. Rappoport

«Numerical solution of some boundary value problems in wedge domains»

Institute for Computer Aided Design, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia,
jmrap@landau.ac.ru

МОНОТОННЫЕ ВЫСОКОТОЧНЫЕ КОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ БЕГУЩЕГО СЧЕТА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Б.В. Рогов¹, С.В. Утюжников², А.В. Чикиткин³

¹*ИПМ им. М.В.Келдыша, МФТИ,
rogov@post.ru*

²*МФТИ,
S.Utyuzhnikov@manchester.ac.uk*

³*МФТИ,
chikitkin@rambler.ru*

Для квазилинейных многомерных гиперболических уравнений представлены консервативные абсолютно устойчивые компактные разностные схемы, монотонные в широком диапазоне значений локального числа Куранта. Они имеют четвёртый порядок аппроксимации по каждой координате на гладких решениях. Схемы экономичны и решаются бегущим счетом по пространственным переменным.

Monotone compact conservative difference schemes are presented for solving quasilinear multidimensional hyperbolic equations. The schemes have a fourth-order of approximation on smooth enough solutions in each space direction and can be used in a wide range of local Courant numbers. The presented schemes are numerically efficient thanks to a simple two-diagonal structure of the matrix to be inverted.

В настоящее время широкое распространение получили двухслойные разностные схемы повышенной точности для сквозного расчета разрывных решений гиперболических систем законов сохранения [1]. При построении таких схем основным принципом является известная теорема об ограничении порядка аппроксимации двухслойных монотонных линейных схем [2]. В обзорной статье [3], посвящённой проблеме построения монотонных, консервативных высокоточных разностных схем для уравнений гиперболического типа, отмечено, что перспективным направлением разработки таких схем является их поиск среди схем, обладающих компактностью пространственного шаблона, т.е. среди так называемых компактных схем [4]. Среди класса компактных схем наибольший интерес представляют симметричные схемы чётного порядка аппроксимации по пространственным независимым переменным, вследствие важного свойства: порядки их классической аппроксимации на гладких решениях гиперболической системы законов сохранения и слабой аппроксимации на разрывных решениях совпадают [5].

В работе предложена компактная разностная схема для численного расчёта многомерных нестационарных уравнений и систем уравнений гиперболического типа. При её построении используются: 1) дивергентные дифференциальные следствия исходных уравнений, также взятых в

дивергентной форме, 2) метод прямых, 3) интегро-интерполяционный метод в пределах одной пространственной сеточной ячейки. Последнее означает, что данная схема является дискретизацией интегральных законов сохранения. Благодаря такому способу построения эта схема унаследовала у своего одномерного аналога [6] ряд важных свойств: 1) она имеет четвёртый порядок аппроксимации по каждой пространственной переменной на шаблоне, состоящем из двух целых узлов, на гладких решениях, поэтому разностные уравнения схемы можно решать методом бегущего счета; другим следствием является сохранение порядка точности схемы на неравномерной пространственной сетке, состоящей из целых узлов; 2) схема имеет третий порядок аппроксимации по времени на гладких решениях, она является трёхстадийной, а на каждой стадии – двухслойной; предложены пространственно-локальные весовые функции, благодаря которым порядок аппроксимации схемы по времени понижается с третьего до первого вблизи разрывов; 3) численные эксперименты показали, что схема имеет монотонные численные решения в таком же широком диапазоне локальных чисел Куранта, что и её одномерный аналог [6]; 4) схема абсолютно устойчива; 5) схема консервативна; 6) схема экономична.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220 "О мерах по привлечению ведущих учёных в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования" по договору № 11.G34.31.0072, заключенного между Министерством образования и науки РФ, ведущим учёным и Московским физико-техническим институтом (государственным университетом).

Список литературы:

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
2. Годунов С.К. // Мат. сб. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
3. Холодов А.С., Холодов Я.А. // ЖВМиМФ. 2006. Т. 46. № 9. С. 1638–1667.
4. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
5. Остапенко В.В. // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
6. Михайловская М.Н., Рогов Б.В. // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. № 4. С. 672–695.

B.V. Rogov¹, S.V. Utyuzhnikov², A.V. Chikitkin³

«Monotone High-Order Accurate Compact Running Scheme for Multidimensional Hyperbolic Equations»

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia, rogov@post.ru*

²*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow Region, Dolgoprudny, Russia, S.Utyuzhnikov@manchester.ac.uk*

³*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow Region, Dolgoprudny, Russia, chikitkin@rambler.ru*

СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

С.И. Соловьёв¹

¹*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
sergei.solovyev@ksu.ru*

Вариационная задача на собственные значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве аппроксимируется задачей в конечномерном подпространстве. Исследуется сходимость и погрешность приближенных решений. Общие результаты иллюстрируются на примере схемы метода конечных элементов с численным интегрированием для дифференциальной задачи второго порядка.

A variational eigenvalue problem in an infinite-dimensional Hilbert space is approximated by a problem in a finite-dimensional subspace. We analyze the convergence and accuracy of the approximate solutions. The general results are illustrated by a scheme of the finite element method with numerical integration for second-order differential eigenvalue problem.

Аппроксимация по методу конечных элементов строится с помощью вариационной постановки исходной задачи, которая естественным образом возникает из обобщенной постановки дифференциальной задачи. Хорошо известная первая лемма Стрэнга сводит погрешность аппроксимации решения вариационного уравнения к оценкам погрешности элемента наилучшего приближения из конечномерного подпространства для точного решения задачи и погрешности замены точных билинейной и линейной форм на приближенные. Этот результат имеет фундаментальное значение для метода конечных элементов и применяется при исследовании погрешности конкретных схем метода конечных элементов с численным интегрированием решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Аналогичный результат для спектральных задач получен в [1-3].

В докладе этот результат формулируется для задачи на собственные значения положительно-определенной ограниченной симметричной билинейной формы относительно вполне непрерывной знаконеопределенной симметричной билинейной формы в гильбертовом пространстве. Эта задача в общем случае имеет последовательность отрицательных и последовательность положительных конечнократных собственных значений. Одна из последовательностей может отсутствовать или быть конечной. Для бесконечной последовательности собственных значений одного знака единственной предельной точкой может быть только бесконечность того же знака. Собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных элементов, образующая базис в ортогональном дополнении к ядру вполне непрерывной билинейной формы. Задается семейство конечномерных подпространств гильбертова пространства и два семейства симметричных билинейных форм, аппроксимирующих гильбертово пространство и билинейные формы задачи. Исходная задача аппроксимируется семейством

конечномерных задач, получающихся заменой исходных данных задачи на приближенные. Доказана сходимость приближенных решений к точным. Получены оценки погрешности приближенных собственных значений и собственных подпространств через погрешности, вносимые в данные при аппроксимации задачи. Общие результаты применяются при выводе оценок погрешности метода конечных элементов с численным интегрированием для одномерной знаконеопределенной дифференциальной задачи на собственные значения второго порядка.

Изложение результатов опирается на работы [1-3]. Аналогичные результаты справедливы также для несамосопряженных задач на собственные значения [4,5] и нелинейных задач на собственные значения [6].

Работа поддержана фондом Гумбольдта (Alexander von Humboldt Foundation) и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00864, 12-01-97026, 13-01-00908)

Список литературы:

1. Соловьев С.И.//Дифференциальные уравнения. 2010. Т.46. №7. С.1022-1032.
2. Соловьев С.И.//Дифференциальные уравнения. 2011. Т.47. №8. С.1175-1182.
3. Соловьев С.И.//Дифференциальные уравнения. 2012. Т.48. №7. С.1042-1055.
4. Соловьев С.И.//Уч.записки Казан. гос. ун-та. Физико-математические науки. 2006. Т. 148. № 4. С. 51-62.
5. Соловьев С.И.// Сеточные методы для краевых задач и приложения. 2010. С. 394-400.
6. Соловьев С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. LAP Lambert Academic Publishing, 2011.

S.I. Solov'ev¹

“Mesh methods for solving spectral problems”

¹*Kazan Federal University, E-mail: sergei.solovyev@ksu.ru*

R-МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ГАУССА

П.Н. Сорокин¹, Н.Н. Ченцова²

¹*НИИ системных исследований РАН – Москва, Россия,
s_p_n_1974@bk.ru*

²*МГУ имени М.В.Ломоносова – Москва, Россия,
chentsova@mech.math.msu.su*

В докладе изучается R-модификация метода Гаусса для решения системы линейных уравнений и получены оценки ведущих элементов.

R-modification of Gauss method for solving the system of linear equations is studied and estimations of the leading elements are obtained.

Определение. Пусть $k \in N^+$, матрица $A \in M_k(R)$ с матричными элементами $(A)_{i,j} \in R$, занумерованными парой индексов $i, j = \overline{1, k}$. Пусть вектора-столбцы $x, b \in R^k$ с координатами $(x)_i, (b)_i \in R$, занумерованными индексом $i = \overline{1, k}$.

R-модификацией метода Гаусса для решения системы линейных уравнений (с матрицей A , правой частью b относительно неизвестного x) :

$$\sum_{1 \leq j \leq k} (A)_{i,j} \cdot (x)_j = (b)_i, \quad \forall i = \overline{1, k} \quad (1)$$

называется алгоритм, отличающийся от метода Гаусса выбором ведущего элемента n -го шага, где $n = \overline{1, k-1}$. Пусть $A^{(0)} = A$, $b^{(0)} = b$.

Ведущим элементом n -го шага, где $n = \overline{1, k-1}$, называется матричный элемент матрицы $A^{(n-1)}$, чей номер (i_0, j_0) является первым в лексикографическом порядке и чей модуль максимален среди модулей матричных элементов $(A^{(n-1)})_{i,j}$, где $i, j = \overline{n, k}$.

Пусть

$$w_n = (A^{(n-1)})_{i_0, j_0}, \quad \Gamma_n = |w_n| = \max_{n \leq i, j \leq k} |(A^{(n-1)})_{i,j}|. \quad (2)$$

Если $w_n = 0$, то алгоритм заканчивает работу с сообщением: “Матрица A вырождена”, иначе вычисляются матрица $A^{(n)}$ и вектор-столбец $b^{(n)}$. Эти вычисления задают n -ый шаг R-модификации метода Гаусса.

Вначале зададим $A^{(n)} = A^{(n-1)}$, $b^{(n)} = b^{(n-1)}$. Если $i_0 \neq n$, то

$$(b^{(n)})_n = (b^{(n-1)})_{i_0}, \quad (b^{(n)})_{i_0} = (b^{(n-1)})_n, \\ (A^{(n)})_{n,j} = (A^{(n-1)})_{i_0,j}, \quad (A^{(n)})_{i_0,j} = (A^{(n-1)})_{n,j}, \quad \forall j = \overline{n, k}.$$

Если $j_0 \neq n$, то

$$(A^{(n)})_{i,j_0} = (A^{(n-1)})_{i,n}, \quad (A^{(n)})_{i,n} = (A^{(n-1)})_{i,j_0}, \quad \forall i = \overline{n, k}.$$

Происходит также перенумерация координат неизвестного x :

$$d = (x)_n, \quad (x)_n = (x)_{j_0}, \quad (x)_{j_0} = d.$$

Затем пересчитываем значения $A^{(n)}$ и $b^{(n)}$ для $i = \overline{n+1, k}$, $j = \overline{n, k}$

$$\delta_i = (A^{(n)})_{i,n} / w_n, \quad (b^{(n)})_i = (b^{(n)})_i - \delta_i \cdot (b^{(n)})_n, \\ (A^{(n)})_{i,j} = (A^{(n)})_{i,j} - \delta_i \cdot (A^{(n)})_{n,j}.$$

Теорема. Пусть при $n = \overline{1, k-1}$ в условиях определения Γ_n – модуль ведущего элемента n -го шага R-модификации метода Гаусса. Тогда:

$$1. \quad \Gamma_{n+1} \leq 2 \cdot \Gamma_n, \quad n = \overline{1, k-1}. \quad (3)$$

2. $\Gamma_{n+1} = 2 \cdot \Gamma_n$, $n = \overline{1, k-1}$ невозможно при $k \geq 3$.
3. $\Gamma_{n+1} > (1 + \theta) \cdot \Gamma_n$, $n = \overline{1, k-1}$, $0 < \theta < 1$, невозможно при $k \geq k_0$, где $k_0 > 1$ – второе по величине значение, для которого справедливо $k_0! \leq (1 + \theta)^{k_0 \cdot (k_0 - 1)/2}$.
4. $\Gamma_n = 2 \cdot (1 + 1/(n-3))$, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cdot (1 - 1/(n-2)^2)$ при $n = \overline{4, k}$ для матрицы $A \in M_k(R)$ такой, что $(A)_{i,j} = \begin{cases} -1, j = \text{mod}_k(i+1), \\ 1, j \neq \text{mod}_k(i+1), \end{cases} \quad \forall i, j = \overline{1, k}$.

Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 12-01-00960).

Список литературы:

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы // Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1987.
2. Богачев К.Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождение собственных значений // М.: Изд-во мехмата МГУ им. М.В.Ломоносова. 1999.

P.N. Sorokin¹, N.N. Chentsova²

“R-modification of the Gauss method”

¹*Scientific-Research Institute for System Studies, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, s_p_n_1974@bk.ru*

²*Moscow State University, Russia, chentsova@mech.math.msu.su*

УСЕЧЕННЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И.Л. Софронов

*МНЦ «Шлюмберже»,
isofronov@slb.com*

Изложена теория получения дифференциального оператора, входящего в прозрачные граничные условия.

Theory of deriving differential operator appearing in transparent boundary conditions is presented.

Применение прозрачных граничных условий (ПГУ) [1] для решения гиперболических задач в открытых областях позволяет использовать вычислительные области минимального размера, поскольку ПГУ являются точными по определению. Основной недостаток ПГУ – наличие нелокальной

части оператора, которую сложно получить и, тем более, реализовать в нетривиальных случаях. Численный подход построения квазианалитических ПГУ [2], удобных для вычислений, использует Фурье разложение по базисным функциям на открытой границе в сочетании с представлением ядер сверток по времени суммами экспонент. Более простой способ имитации неотражения от открытых границ состоит в отбрасывании нелокальной части оператора ПГУ, т.е. в использовании только дифференциального оператора, входящего в его формулы [3]. Мы называем такие условия усеченными ПГУ.

В докладе представлена теория усеченных ПГУ для систем гиперболических уравнений второго порядка, выписаны формулы для ряда задач динамической упругости и приведены численные примеры.

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-00338)

Список литературы:

1. Софронов И.Л. // Доклады РАН. 1992. Т. 326. № 6. С. 453-457.
2. Sofronov I.L., Zaitsev N.A. // J. Comp. Appl. Math. 2010, V. 234. P. 1732-1738.
3. Софронов И.Л. // Доклады РАН. 2009. Т. 426. № 5. С. 602-604.

I.L. Sofronov

«Truncated transparent boundary conditions for second order hyperbolic systems»
Schlumberger Moscow research, isofronov@slb.com

ЭФФЕКТ ОБЪЁМНОЙ ВЯЗКОСТИ В ИЕРАРХИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ УПРОЩЁННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Б.В. Рогов¹, А.В. Чикиткин², Г.А. Тирский³

¹*ИПМ им. М.В.Келдыша, МФТИ, rogov@post.ru*

²*МФТИ, alexchikitkin@gmail.com*

³*МФТИ, tirsky@imec.msu.ru*

В работе качественно и численно исследуется влияние коэффициента объёмной вязкости (к.о.в.) на сопротивление и теплообмен в сверхзвуковой и гиперзвуковой аэродинамике в рамках уравнений Навье-Стокса и их асимптотически упрощённых вариантов. Подробно исследуется задача о структуре ударной волны.

Influence of the bulk viscosity coefficient on drag and heat transfer in supersonic and hypersonic aerodynamics is investigated in the framework of the Navier-Stokes equations and their asymptotically simplified versions. A detailed study of the shock wave structure is presented.

В настоящее время известно, хотя и не достаточно широко, что классическая форма уравнений Навье-Стокса-Фурье (далее Навье-Стокса)

применима в лучшем случае только к одноатомным газам (He, Ar, Ne), при этом применяется гипотеза Стокса: объёмная вязкость равна нулю: $\mu_b = 0$ [1].

Эта гипотеза, как правило, молчаливо принимается и по сей день при решении задач аэротермодинамики в рамках полных уравнений Навье-Стокса и их упрощённых вариантов и к многоатомным газам, в частности к воздуху, к атмосферам планет, содержащим CO_2 , H_2 . Однако, для молекулярных газов с внутренними степенями свободы феноменологический и кинетический выводы определяющего уравнения для тензора напряжений дают [2]:

$$\hat{P} = (-p + p_{rel} + \mu_b \nabla \cdot \vec{v}) \hat{I} + 2\mu \hat{e}^0, \hat{e}^0 = \hat{e} - 1/3 \nabla \cdot \vec{v} \hat{I} \quad (1)$$

где p - давление, p_{rel} - релаксационное давление, \hat{I} - метрический тензор, \hat{e} - тензор скоростей деформации. К.о.в. μ_b появляется из-за наличия обмена энергией между поступательными и внутренними модами. Если предполагается, что все эти процессы быстрые, появляется один к.о.в., который пропорционален временам релаксации процессов обмена, и позволяет учесть их без существенного усложнения уравнений модели. p_{rel} в данной работе не рассматривается [3].

Из выражения (1) следует, что вклад объёмной вязкости тем больше, чем сильнее сжимаемость течения, поэтому учёт к.о.в. особенно важен для сверхзвуковых течений, где сжимаемость велика в ударных волнах и пограничных слоях.

В данной работе проводится их анализ уравнений Н.-С. на предмет появления к.о.в. в асимптотически упрощённых моделях. В уравнения будут входить члены порядка $O(\mu_b \text{Re}^{-1})$, которые для некоторых газов (например, для CO_2 $\mu_b \approx 10^3$), будут несколько порядков больше чисел Рейнольдса. Поэтому для больших значений к.о.в. теория пограничного слоя разного порядка должна быть пересмотрена.

В работе детально исследуется структура фронта ударной волны с учётом к.о.в. Разработан численный метод для аккуратного расчёта. Показано очень хорошее совпадение расчётов с экспериментальными данными при учёте к.о.в. Расчёты по модели ПУНС также демонстрируют сильное влияние объёмной вязкости на основные характеристики течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N 220 "О мерах по привлечению ведущих учёных в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования" по договору № 11.G34.31.0072, заключенного между Министерством образования и науки РФ, ведущим учёным и Московским физико-техническим институтом (государственным университетом).

Список литературы:

1. G.G. Stokes // Math. Phys. Papers. 1880. Т. 1.
2. Жданов В.М., Алиевский М.Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах // М.: Наука. 1989. 336 с.

3. Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов // СПб.: Издательство С.-Петербургского университета. 2003. 272 с.

B.V. Rogov¹, A.V. Chikitkin², G.A. Tirskey³

«Effect of bulk viscosity in the hierarchies of the asymptotically simplified Navier-Stokes equations»

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia, rogov@post.ru*

²*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow Region, Dolgoprudny, Russia, alexchikitkin@gmail.com*

³*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow Region, Dolgoprudny, Russia, tirskey@imec.msu.ru*

СРАВНЕНИЕ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА СЖИМАЕМОГО ГАЗА

В.А. Титарев^{1,2}, С.В. Утюжников^{2,3}

¹*ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия, titarev@ccas.ru*

²*МФТИ, Москва, Россия,*

³*Университет Манчестера, Великобритания,
s.utyuzhnikov@manchester.ac.uk*

В работе проводится сравнение неявных конечно-объемных схем для решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа. Для выбранных тестовых задач исследуются сходимость по сетке, масштабируемость и влияние разбиения сетки на блоки на скорость установления стационарного решения.

The paper concerns comparison of finite-volume schemes for solving the compressible Navier-Stokes equations. For a number of problems mesh convergence, scalability and the influence of mesh partitioning on the steady-state convergence are investigated.

В лаборатории “FlowModellium” МФТИ ведется разработка численных методов и пакета программ для решения трехмерных сжимаемых уравнений Навье-Стокса химически реагирующего газа на основе существующего задела участников проекта [1-3]. В настоящем докладе будет представлено детальное сравнение нескольких неявных методов решения стационарных задач, получаемых при комбинировании полностью трехмерной [2,3] или локально одномерной аппроксимаций конвективных производных, конвективных потоков Русанова, HLL и HLLC [4] и двух методов дискретизации вязких членов [5,6].

В качестве примеров решаются задачи о пограничном слое на пластине и гиперзвуковом обтекании затупленных тел. Расчеты проводятся на кластере лаборатории с использованием до 128 ядер. Исследуются сходимость по сетке, масштабируемость и влияние разбиения сетки на блоки на скорость установления стационарного решения при использовании неявной дискретизации по времени типа LU-SGS [7,8]. Основным критерием качества численных результатов является точность вычисления потока тепла к поверхности и коэффициента трения для различных чисел Маха и Рейнольдса набегающего потока.

Работа поддержана грантом Правительства РФ по Постановлению N 220 "О мерах по привлечению ведущих учёных в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования" по договору № 11.G34.31.0072, заключенному между Министерством образования и науки РФ, ведущим учёным и Московским физико-техническим институтом (государственным университетом).

Список литературы:

1. Utyuzhnikov S.V. and Nabiev, V.U. Numerical investigation of 3D supersonic viscous nonuniform flows past blunt bodies // J. of Fluid Dynamics. 1999. V.34, No. 6, pp. 906-911.
2. Dumbser M., Käser M., Titarev V.A., Toro E.F. Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems // J. Comp. Phys. 2007. V. 221. - No.2, pp. 693-723.
3. Tsoutsanis P., Titarev V.A., Drikakis D. WENO schemes on arbitrary mixed-element unstructured meshes in three space dimensions // Journal of Computational Physics. 2011. V. 230, pp. 1585 – 1601.
4. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer-Verlag. 2009. Third Edition, p. 724.
5. Dumbser M. Arbitrary high order PNPM schemes on unstructured meshes for the compressible Navier-Stokes equations // Computers & Fluids. 2010. V. 39 N. 1. p.60--76.
6. Frink N.T. Assessment of an unstructured-grid method for predicting 3-D turbulent viscous flows // AIAA-96-0292. 1996.
7. Men'shov I.S., Nakamura Y. An implicit advection upwind splitting scheme for hypersonic air flows in thermochemical nonequilibrium. 1995. A Collection of Technical Papers of 6th Int. Symp. on CFD. V. 2. Lake Tahoe, Nevada. 815 p.
8. Men'shov I.S., Nakamura Y. On implicit Godunov's method with exactly linearized numerical flux // Computers and Fluids. 2000. V. 29. N. 6. P. 595-616.

V.A. Titarev^{1,2}, **S.V. Utyuzhnikov**^{2,3}

¹ *Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, titarev@ccas.ru*

² *MIPT, Moscow, Russia,*

³ *Manchester University, UK, s.utyuzhnikov@manchester.ac.uk*

ТОЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

А.В. Шильков¹, В.А. Тыглиян²

¹ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – Москва,
ale-shilkov@yandex.ru

²ИПМ им. М.В. Келдыша РАН – Москва,
trititaty@gmail.com

Работа посвящена разработке точной разностной схемы для решения одномерных задач для уравнения переноса в приближении анизотропной диффузии в плоской, цилиндрической и сферической геометриях.

The paper considers development of the exact finite-difference scheme for solving one-dimensional problems for transfer equation in the anisotropic diffusion approximation in the plane, cylindrical and spherical geometries.

Согласно классификации Тихонова А.Н. и Самарского А.А. [1] «точная» разностная схема — это схема, которая воспроизводит точное аналитическое решение системы дифференциальных уравнений внутри пространственных ячеек с однородными физическими свойствами. На границах ячеек, где коэффициенты и источники уравнений могут иметь разрывы, производится сшивка решений из соседних ячеек или увязка решения с краевыми условиями на внешней границе расчетной области. Результатом является «точная» разностная схема исходной дифференциальной краевой задачи (с точностью до априорных предположений, принимаемых при задании поведения коэффициентов и источников внутри ячеек). В отличие от обычных разностных схем, в «точной» разностной схеме не делается априорных предположений относительно поведения искомых функций внутри ячеек.

Ранее точная разностная схема для уравнений анизотропной диффузии в одномерной плоской задаче была построена в [2], (см. также [3]). Данная работа распространяет точную схему на одномерные задачи с цилиндрической и сферической симметриями.

Основным достоинством «точной» разностной схемы является то, что она (в отличие от обычных схем) не теряет аппроксимации в оптически тонких и оптически толстых ячейках при постановке естественных граничных условий на границе расчетной области.

Проводится сравнение результатов расчетов, выполненных по точной и обычной схемам.

Обсуждаются вопросы практического использования схемы при решении прикладных задач.

Список литературы:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Об однородных разностных схемах. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1961. — Т. 1. — № 1. — С. 6—63.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — Т. 2. — № 5. — С. 812—832.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. — Москва: Наука, 1971. — С. 140—999.

A.V. Shilkov¹, V.A. Tygliyan²

«Exact finite-difference scheme for one-dimensional equations of anisotropic diffusion of radiation»

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia, ale-shilkov@yandex.ru*

²*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia, trititaty@gmail.com*

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ БЕЗ ПЕРЕКРЫТИЯ ПОДОБЛАСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИСТЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

С.В. Утюжников

¹*The University of Manchester – U.K.,*

s.utyuzhnikov@manchester.ac.uk

²*МФТИ – Долгопрудный, Россия*

Показывается возможность реализации декомпозиции расчетной области для моделирования пристенных турбулентных течений. При таком подходе граничное условие со стенки переносится на искусственную промежуточную границу преимущественно вне ламинарного подслоя. В общем случае возникающие граничные условия являются нелокальными.

A non-overlapping domain decomposition is developed for modelling near-wall turbulence flows. Boundary conditions are transferred from the wall to an interface boundary predominantly situated outside the laminar sublayer. This leads to nonlocal interface boundary conditions.

Применение высокорейнольдсовых моделей турбулентности требует постановку граничных условий (ГУ) на внешней границе ламинарного подслоя, часто называемых пристенными функциями. Как правило, такие ГУ являются полуэмпирическими. В настоящей работе, получены пристенные ГУ с помощью приближенного переноса ГУ со стенки на искусственную границу. В пространственной постановке такие ГУ являются нелокальными. Показывается существенность нелокальных ГУ и рассматриваются особенности их реализации. Продемонстрированы особенности переноса ГУ для существенно

нестационарных течений. Показано, что модели, основанные на стандартных пристенных функциях неприменимы при таких режимах.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ по Постановлению N 220 "О мерах по привлечению ведущих учёных в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования" по договору № 11.G34.31.0072.

Список литературы:

1. Utyuzhnikov S.V.// "Interface boundary conditions in near-wall turbulence modeling". *Int. J. Computers & Fluids*. 2012. 68, сс.186-191.
2. Utyuzhnikov S.V.// "Domain decomposition for near-wall turbulent flows", *Int. J. Computers & Fluids*. 2009. 38 (9), сс. 1710-1717.
3. Utyuzhnikov S.V.// "Robin-type wall functions and their numerical implementation", *J. Applied Numerical Mathematics*. 2008. 58(10), сс. 1521-1533.
4. Utyuzhnikov S.V.// "The method of boundary condition transfer in application to modeling near-wall turbulent flows". *Int. J. Computers & Fluids*. 2006. 35 (10), сс. 1193-1204.

КОНТРОЛЬ ШИРИНЫ ШАГА ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

О. Г. Чижко

*Московский Экологический Центр, Россия,
oleg.tschischko@ingenieur.de*

Проведено математическое моделирование химического состава системы, полученной при сгорании твердых плазмообразующих топлив. Методом сплайном получены функции изменения теплоемкости комплексных соединений алюминия. Изучено влияние невязки и погрешности дискретизации на точность аппроксимации активностей смесевых кристаллических веществ.

We introduce the mathematical model of computation for the chemical content of systems, which are produced during the burning processes of solid plasma-spraying fuels. The functions for heat capacities of complex aluminum-containing compounds were interpolated with help of the spline method. We study an influence of the local and global discretization errors on the approximation of activities for oxide composites.

Найдем численное решение частной производной уравнения, полученного сплайнами по данным калориметрического анализа, для приведенной энергии Гиббса

$$A_h \Phi^\circ(T) = f(T, \Phi^\circ(T)), \quad \Phi^\circ(298,15) = A_{T_0}, \quad T \in I(T_0, T_0 + H), \quad (1)$$

методами Эйлера первого с невязкой приближения [1]

$$\tau_n = (\phi_n - \phi_{n-1})/h - f(T_{n-1}, \phi_{n-1}(T)), \quad n = 0, \dots, N, \quad (2)$$

Хейна (трапеций) второго и Рунге-Кутта четвертого порядков.

В таблице 1 выведена ошибка дискретизации $e_n = \max_{0 \leq n \leq N} \|\Phi^\circ(T_n) - \phi_n(T)\|$ в предположении конвергентности $\Phi^\circ(298,15)$ и ϕ_0 , а также консистентности значений

$$\|e_n\| \leq \|e_{n-1}\| + hL\|e_{n-1}\| + h\|\tau_n\| \quad (3)$$

для вычислительного алгоритма точной постановки задачи Коши. Здесь $A_{298,15}$ – константа интегрирования и A_h оператор дифференцирования, L – постоянная сходимости.

Таблица 1: Невязка и погрешность аппроксимации

Метод	Эйлера	Хейна	Рунге-Кутта	$ e_h $
Шаг h	$ \tau_h $	$ \tau_h $	$ \tau_h $	
0,01	8,3666234391	0,6163134392	0,0706482156	0,2707517365
0,001	0,6296028597	0,0048414538	4,7279124686E-6	0,2115998264
0,0001	0,0607887368	4,7448783604E-5	4,4970249746E-10	0,2096778906

Пусть функция $f(T, \Phi^\circ(T))$ непрерывна на I и сходится

$$\|f(T, \Phi^\circ(T)) - f(T, \phi(T))\| \leq L\|\Phi^\circ(T) - \phi(T)\|, \quad (4)$$

то решение (3.2) существует и единственно для $T \geq 0$.

Необходимо сделать вывод [2], что при выполнении условия стабильности (4) приближение решения (1) ограничено значением L , а величина ширины шага удовлетворяет $h_n \leq 2/L_{n-1}$ при $n \geq 1$. Уточнение вышеназванного аргумента позволяет расширить область действия (4) на расчет оценки локальной ошибки $\|\tau_h\| \leq 0,5h \cdot \max_{T_n \in I} \|\Phi''(T)\|$, которая на начальном интервале температур при $h=0,01$ не достигает данного неравенства. Уменьшение до $h=0,001$ снимает эту проблему. Глобальная же погрешность предполагается $\max_{T_n \in I} \|e_n\| \leq H \cdot \exp(HL) \max_{T_n \in I} \|\tau_n\|$ гораздо большей, чем машинная точность округления.

Список литературы:

1. Галанин М.Н., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. – М.: Наука, Физматлит, 1995.
2. Ranacher R. Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, Vorlesungsskriptum, 2012.
3. Калиткин Н.Н Численные методы. – М.: Наука, 1978.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1978.

Oleg Chizhko

«The control of step width during the numerical investigations of convergence for interpolation polynomials of experimental dates»

Moscow environmental center, Russian Federation, oleg.tschischko@ingenieur.de

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

С.В. Милютин¹, А.А. Фролов², Е.В. Чижонков³

¹ООО «Рок Флоу Динамикс» – Москва, Россия,
svmilytin@gmail.com

²Объединенный институт высоких температур РАН – Москва,
frolov@ihed.ras.ru

³Механико-матем. ф-т МГУ им. М.В.Ломоносова,
chizhonk@mech.math.msu.su

Ранее авторами в рамках одномерной гидродинамической модели был исследован эффект внеосевого опрокидывания цилиндрических аксиально-симметричных нелинейных плазменных колебаний. В докладе для двухмерного моделирования указанного эффекта на компьютерах с распределенной памятью обсуждается явный метод второго порядка точности в эйлеровых переменных.

Previously, the authors was investigated the effect of off-axis breaking cylindrical axially - symmetric nonlinear plasma oscillation in the one-dimensional hydrodynamic model. In report, a two-dimensional simulation of this effect on computers with distributed memory discussed explicit method of second order accuracy in Eulerian variables.

В качестве объекта для исследований плазменные колебания выбраны из следующих соображений. С одной стороны, хорошо известно ([1]), что одномерные цилиндрические колебания в плазме разрушаются при любых (сколь угодно малых!) амплитудах вследствие вклада электронных нелинейностей в сдвиг частоты. Это порождает математическую нетривиальность задачи. А с другой – они являются простой, но весьма содержательной моделью для изучения аксиально-симметричных кильватерных плазменных волн, возбуждаемых движущимися источниками – драйверами (электронными сгустками, короткими лазерными импульсами).

При математическом моделировании процессов в бесстолкновительной холодной плазме наиболее часто используются два подхода: метод частиц и гидродинамическое описание. В первом случае критерием опрокидывания (разрушения) колебаний является пересечение электронных траекторий, а во втором – обращение в бесконечность функции, описывающей плотность электронов. В [2] имеется строгое обоснование появления сингулярности среды при пересечении траекторий частиц.

Одномерная задача об опрокидывании колебаний в эйлеровых переменных уже является достаточно сложной с вычислительной точки зрения [3]. Во-первых, значение координаты по времени разрушения колебаний весьма чувствительно к входным данным: в слабо-нелинейном приближении оно обратно пропорционально кубу начальной амплитуды. Это означает, что

определение физических параметров вычислительно доступного варианта является непростой задачей. Во-вторых, радиальная (по отношению к оси симметрии) координата опрокидывания в умеренно нелинейном режиме, т.е. когда возмущение электронной плотности всего лишь на порядок превосходит фоновое значение, составляет порядка 1-2 % от характерного размера расчетной области. Другими словами, с целью адекватного отображения процесса требуются по порядку тысячи точек по каждой пространственной координате даже при условии гладкости и ограниченности искомых функций.

При отказе от аксиальной симметрии задачи необходимым для расчетов становится применение суперкомпьютеров: требуемый объем вычислений вырастает примерно на три - четыре порядка, аналогично меняются требования к оперативной памяти. Кроме того, модернизируются идеи вычислительных алгоритмов, так как масштабируемость расчетов существенно опирается на явные методы аппроксимации [4].

В докладе приведены: физическая постановка задачи и качественный сценарий развития - завершения аксиально-симметричных плазменных колебаний, результаты одномерного моделирования на основе гидродинамического описания с использованием переменных Эйлера и Лагранжа, расчеты по двухмерной модели на СКИФ МГУ "Чебышев" на базе гибридного параллельного кода. Основной акцент сделан на конструкции используемых разностных схем.

Список литературы:

1. Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. V.113, №2. P.383-387.
2. Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В., Андреев Н.Е. Опрокидывание нелинейных цилиндрических колебаний плазмы // Физика плазмы. 2010. Т.36, №4. С.375-386.
3. Попов А.В., Чижонков Е.В. Об одной разностной схеме для расчета плазменных аксиально-симметричных колебаний // Вычисл. методы и программ. 2012. Т.13, №1. С.5-17.
4. Chizhonkov E.V., Frolov A.A. Numerical simulation of the breaking effect in nonlinear axially-symmetric plasma oscillations. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. 2011. V.26, №4. P.379-396.

S.V. Milyutin¹, A.A. Frolov², **E.V. Chizhonkov³**

«On finite-difference schemes for computing nonlinear plasma oscillations»

¹ LLC Rock Flow Dynamics, Moscow, Russia, svmilytin@gmail.com

² Joint Institute for High Temperatures of RAS, Moscow, frolov@ihed.ras.ru

³ Faculty of Mechanics and Mathematics of Lomonosov Moscow State University, chizhonk@mech.math.msu.su

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СЕН–ВЕНАНА В ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

А.А. Сухомозгий¹, Ю.В. Шеретов²

¹ *Тверской государственный университет, Россия,
suhomozgy.andrey@gmail.com*

² *Тверской государственный университет, Россия,
yurii.sheretov@tversu.ru*

Приведен конечно–разностный вывод регуляризованных уравнений Сен–Венана в теории мелкой воды. Исследованы их свойства. Построена разностная схема расчета одномерных нестационарных течений жидкости. Методом энергетических неравенств в линейном приближении получено достаточное условие ее устойчивости. Рассмотрена серия тестовых задач.

Finite–difference derivation of regularized Saint–Venant equations in the shallow water theory is presented. Their properties are investigated. Finite–difference scheme of calculation one–dimensional non–stationary fluid flows is constructed. Sufficient condition of it stability is obtained in linear approximation by the method of energy inequalities. A series of test problems is considered.

В монографии [1] изложены конечно–разностные выводы регуляризованных уравнений Навье–Стокса для вязкой сжимаемой теплопроводной среды. Одна из полученных систем совпала с квазигазодинамической системой, предложенной Б.Н. Четверушкиным и Т.Г. Елизаровой. На основе квазигазодинамической системы в [1] построена эффективная разностная схема расчета одномерных нестационарных газодинамических течений в эйлеровых координатах. Там же приведено доказательство теоремы об ее устойчивости в акустическом приближении. Достаточное условие устойчивости идентично неравенству Куранта. Это научное направление получило дальнейшее развитие в работах многих авторов.

Квазигазодинамическая система в баротропном приближении была впервые выписана А.А. Злотником [2]. Регуляризованные уравнения Сен–Венана представляют собой ее частный случай. В последнее время идеи, изложенные в [1], стали применяться для вывода регуляризованных уравнений теории мелкой воды и конструирования на их базе новых разностных схем [3]. В настоящей заметке эти исследования продолжены.

Работа авторов [4] посвящена исследованию свойств классических решений регуляризованных уравнений Сен–Венана. Дана постановка основной начально–краевой задачи и доказана теорема о возрастании с течением времени специфической энтропии. Выведена регуляризованная система Сен–Венана в линейном приближении. Для нее установлены свойства асимптотической устойчивости равновесного решения и единственности классического решения.

В статье [5] приведен конечно–разностный вывод регуляризованных уравнений Сен–Венана. На их основе построена явная нелинейная однородная

разностная схема первого порядка аппроксимации по пространству и времени, позволяющая приближенно находить обобщенные решения классических уравнений Сен–Венана в теории мелкой воды. Проведена серия тестовых расчетов одномерных нестационарных течений жидкости со свободной границей. Для задачи Римана о распаде разрыва и задачи о натекании потока жидкости на преграду используемый алгоритм оказался на порядок точнее, чем метод Лакса–Фридрихса, при незначительном увеличении затрат машинного времени. Качество разностного решения также улучшилось. В [6] методом энергетических неравенств выведено достаточное условие устойчивости по начальным данным используемой разностной схемы в линейном приближении.

Список литературы:

1. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. 400 с.
2. Злотник А.А. Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 2010. Т. 50, № 2. С. 325–337.
3. Елизарова Т.Г., Булатов О.В. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 2011. Т. 51, № 1. С. 170–184.
4. Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В. Единственность решения регуляризованных уравнений Сен–Венана в линейном приближении // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. 2012. Вып. 24. С. 5–17.
5. Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В. Тестирование нового алгоритма расчета одномерных нестационарных течений жидкости со свободной границей // Вестник ТвГУ. Прикл. мат. 2012. Вып. 27. С. 47–64.
6. Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В. Анализ устойчивости одной разностной схемы решения уравнений Сен–Венана в теории мелкой воды // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2013. С. 48–60.

Sukhomozgii A.A.¹, Sheretov Yu.V.²

«On the numerical scheme for solving Saint–Venant equations in shallow water theory»

¹*Tver State University, Russia, suhomozgy.andrey@gmail.com*

²*Tver State University, Russia, yurii.sheretov@tversu.ru*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТЯХ С АНИЗОТРОПНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

М.И. Эпов¹, Н.В. Штабель¹, Э.П. Шурина²

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН –
Новосибирск, Россия,
orlovskayanv@ipgg.sbras.ru

²Новосибирский государственный технический университет,
shurina@online.sinor.ru

В работе предложена вычислительная схема для уравнения Гельмгольца с тензорным коэффициентом электропроводности. Численное моделирование выполнено на базе векторного метода конечных элементов. Проведен ряд вычислительных экспериментов, показывающий влияние анизотропного объекта на поле в зависимости от положения объекта и частоты источника возбуждения поля.

The computation scheme for the Helmholtz equation with tensor conductivity was proposed in this work. Numerical computations based on vector finite element method. The series of numerical experiments showed effect from anisotropic object depending on object's location and source frequency.

В работе рассмотрено математическое моделирование электрического поля в частотной области, описываемое уравнением Гельмгольца:

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} - i\omega \sigma \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

где \mathbf{E} - электрическое поле, \mathbf{J} - возмущающий ток в генераторной петле, μ^{-1}, ε - магнитная и диэлектрическая проницаемости соответственно, σ - электропроводность среды, описываемая тензором второго ранга. На границе области заданы краевые условия «большого бака».

Вариационная постановка для уравнения Гельмгольца построена на базе векторного метода конечных элементов на симплицальных неравномерных сетках с локальными сгущениями. В качестве базиса был выбран полный базис Неделека первого порядка, ассоциированный с ребрами тетраэдрального разбиения.

В работе исследовано влияние анизотропного объекта, находящегося в изотропной среде, на поведение электрического поля. В качестве объекта исследования был выбран диск, толщина которого в несколько раз меньше диаметра. Электропроводность вдоль объекта отличается от электропроводности в круглом сечении. Такая анизотропия описывается диагональным тензором: $\sigma = \operatorname{diag}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, где σ_x, σ_y - электропроводность в круглом сечении диска, σ_z - электропроводность вдоль толщины диска.

Объект может быть произвольно ориентирован в пространстве, тогда тензор электропроводности в уравнении Гельмгольца становится плотным и

значения компонент тензора зависят от положения диска, относительно системы координат[1].

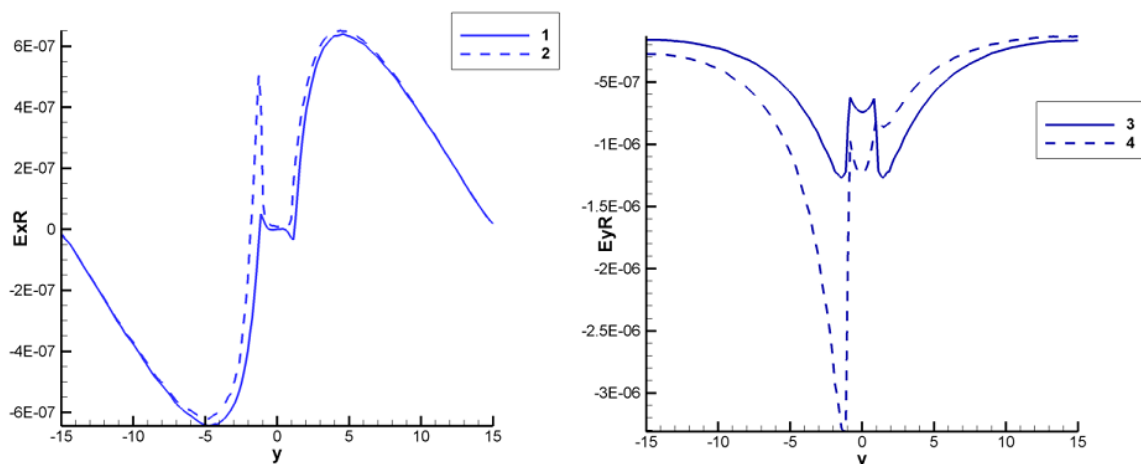


Рис. 1. Распределение действительных компонент поля E_x , E_y для изотропного (кривые 1 и 3) и анизотропного объекта (кривые 2 и 4) по профилю $x=3.4\text{м}$

Исследование показало, что анизотропный объект не всегда может быть выделен в электрическом поле, создаваемом горизонтальной токовой петлей на частотах от 1 кГц до 1 МГц, по сравнению с таким же изотропным объектом. Максимальное проявление анизотропных свойств объекта было зафиксировано на низкой частоте (1 кГц), когда ось анизотропии σ_z являлась тангенциальной к плоскости петли (см. рис. 1).

Работа поддержана междисциплинарными интеграционными проектами СО РАН № 98 и № 130.

Список литературы:

1. Орловская Н.В., Шурина Э.П., Эпов М.И. // Журнал «Вычислительные технологии», 2008, Т.13. №1, С. 93-106.

М.И. Епов¹, Н.В. Сhtabel¹, Е.Р. Shurina²

«The mathematical modeling of electric field in the domains with anisotropic objects»

¹Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia, orlovskayanv@ipgg.sbras.ru

²Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia, shurina@online.sinor.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТЯХ С МАЛЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

М.И. Эпов¹, Э.П. Шурина^{1,2}, Е.И. Михайлова²

¹Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука
СО РАН – Новосибирск, Россия,

²Новосибирский государственный технический университет,
shurina@online.sinor.ru

В работе рассматриваются особенности численного моделирования квазистационарных электромагнитных полей в областях сложной геометрии с малыми включениями векторным методом конечных элементов на тетраэдральных разбиениях.

The paper is devoted to some aspects of numerical simulation of quasi-stationary electromagnetic fields in complex computational domains with small inclusions. The problem is solved using the vector finite element method on tetrahedral triangulation.

В исследованиях современных искусственных и природных объектов сложной геометрической и электрофизической структуры всё более востребованными становятся вычислительные схемы, обеспечивающие необходимую точность решения трёхмерных уравнений Максвелла. В частотной области для комплекснозначного вектора напряженности электрического поля \vec{E} переходят к решению уравнения Гельмгольца в расчетной области Ω с Липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega = \Gamma_{\mathcal{D}} + \Gamma_M$

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{E} + k^2 \vec{E} = -i\omega \vec{J} \quad \text{в } \Omega$$

где k^2 – волновое число, не являющееся собственным значением, $\Gamma_{\mathcal{D}}$ и Γ_M – границы, на которых заданы электрические и магнитные краевые условия соответственно:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E} \Big|_{\Gamma_{\mathcal{D}}} &= \vec{E}_{0\tau}, \\ \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{n} \Big|_{\Gamma_M} &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E} \Big|_{\Gamma_{\mathcal{D}}} &= 0, \\ \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{E} \times \vec{n} \Big|_{\Gamma_M} &= -i\omega \vec{\theta}. \end{aligned}$$

При вычислениях в областях с внутренними границами, к которым относятся и области с малыми включениями, разделяющими подобласти с контрастными электрофизическими характеристиками, должны выполняться условия непрерывности тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля и скачка его нормальной компоненты. При конечноэлементной аппроксимации уравнения Гельмгольца на тетраэдральном

разбиении расчетной области на функциях формы, принадлежащих пространству $H(\text{rot}, \Omega)$ [1, 2], система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является знаконеопределенной вследствие нуль-ядра rotrot -оператора, что приводит к необходимости использования специального решателя и иерархического базиса не менее второго полного порядка [3].

В работе представлены результаты моделирования электромагнитного поля в средах с малыми включениями при варьировании частот (от 500 МГц до 10 ГГц), размеров включений и расстояния между ними.

Работа выполнена при поддержке междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №98

Список литературы:

1. Nedelec J.-C. A new family of mixed finite elements in R^3 // Numer.Math.. – 1986. – Vol. 50(1). – P. 57-81.
2. Webb J.P. Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements / J.P. Webb // IEEE Trans. on antennas and propagation. – 1999. – vol. 47(8). – P. 1244-1253.
3. Шурина Э.П., Эпов М.И., Нечаев О.В. Устойчивые вычислительные схемы моделирования трехмерных электромагнитных полей в задачах геоэлектрики // Сиб. электрон. матем. изв., 7 (2010), С.150–162.

М.И. Епов¹, Е.П. Шурина², Е.И. Михайлова²

«Modeling of High Frequency 3D Electromagnetic Field in a Domain with Small Inclusions»

¹A.A. Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State Technical University, shurina@online.sinor.ru

INDEX

AAbarbanel S. **14****B**Barenblatt G.I. **15**Bogoliubov N.A. **28**Botchev M.A. **16**Bussoletti J.E. **19**Britt D.S. **33****C**Chorin A.G. **15**Chertock A. **17****D**Ditkowski A. **14****G**Glazyrin I.V. **22****H**Hagstrom T. **18**Hilmes C.L. **19****J**Johnson F.T. **19****K**Kamenetskiy D.S. **19**Karpeev A.V. **22**Kotova O.G. **22**Kurganov A. **23****M**Medvinsky M. **33**Menshov I. **24**Mukhartova Yu.V. **28****P**Prostokishin V.M. **15****S**Salas M. **30**Sveshnikov A.G. **28****T**Toro E. **32**Turkel E. **33****V**Venkatakrishnan V. **19****W**Wigton L.B. **19**

А

Абрамов А.А. **35**
 Аверина Т.А. **68**
 Акимова Е.Н. **37**
 Алгазин С.Д. **39**
 Аристова Е.Н. **41**

Б

Бадриев И.Б. **43**
 Баззаев А.К. **45**
 Белокрыс-Федотов А.И. **48**
 Бондарева А.Л. **46, 68**
 Булатов О.В. **57**

Г

Гаранжа В.А. **48**
 Гулин А.В. **50**

Д

Довгилевич Л.Е. **52**
 Долголева Г.В. **54**
 Дородницын Л.В. **55**

Е

Елизарова Т.Г. **57**

Ж

Жуков В.Т. **58**

З

Завьялова Н.А. **61**
 Задорин А.И. **62**
 Зайцев Н.А. **64**
 Злотник А.А. **66**
 Злотник И.А. **66**
 Змиевская Г.И. **46, 68**

И

Ильин И.А. **87**

К

Карпов С.А. **69**
 Ким А.В. **71**
 Колесников И.Ю. **73**
 Кормышев В.М. **71**
 Коротаев Д.О. **75**
 Кудрявцева Л.Н. **48**
 Кудряшова Т.А. **76**

М

Мартыненко С.В. **41**
 Мартыненко С.И. **77**
 Медин С.А. **85**
 Милютин С.В. **105**
 Михайлов Н.А. **79**
 Михайлова Е.И. **111**

Н

Недоступ А.А. **81**
 Николаев А.П. **83**
 Николаев Л.А. **83**
 Новикова Н.Д. **58**
 Нощенко Д.С. **87**

П

Паршиков А.Н. **85**
 Пережогин А.С. **87**
 Поляков С.В. **76**
 Потапенко И.Ф. **69**

Р

Ражев А.О. **81**
 Раппопорт Ю.М. **89**
 Рогов Б.В. **41, 91, 97**
 Рябенский В.С. **11**

С

Сафронов М.А. **71**
 Силаев Д.А. **75**
 Соловьёв С.И. **93**
 Сорокин П.Н. **94**
 Софронов И.Л. **52, 96**
 Семенов А.В. **71**
 Сухомозгий А.А. **107**

Т

Тирский Г.А. **97**
Титарев В.А. **99**
Тыглиян В.А. **101**

У

Утюжников С.В. 48, 61, 91, 99, **102**

Ф

Феодоритова О.Б. 58
Фролов А.А. 105

Ц

Цынков С.В. **33**

Ч

Ченцова Н.Н. **94**
Чижко О.Г. **103**
Чижонков Е.В. **105**
Чикиткин А.В. 91, 97

Ш

Шеретов Ю.В. **107**
Шильков А.В. 101
Штабель Н.В. **109**
Шурина Э.П. 107, **111**
Шхануков-Лафишев М.Х. 45

Э

Эпов М.И. 109, 111

Ю

Юхно Л.Ф. 35

Научное издание

Сборник научных трудов Международной конференции
«Разностные схемы и их приложения»,
посвященной 90-летию профессора В.С. Рябенского

Редакция и компьютерная подготовка к изданию
– М.С.Гавреева, А.В. Северин, Н.А. Чмыхова

Отпечатано с оригинал–макета, изготовленного
в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН